

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 20 giugno 1909.*

F. D' OVIDIO Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota 2<sup>a</sup> del Socio E. BERTINI.

Le condizioni di rappresentabilità di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre, date dapprima da Noether in due lavori del 1869 e 1872, sono state poi studiate sotto varî aspetti in altri lavori <sup>(1)</sup>. Così, quelle condizioni richiedendo che per ciascun punto comune alle due curve (rappresentate dalle due ultime forme eguagliate a zero) si possa determinare una certa curva avente il punto considerato multiplo secondo un numero abbastanza elevato, si trova che questo numero può prendersi eguale ad

$$\alpha - s_1 s_2 + s_1 + s_2 - 1,$$

il punto essendo  $(s_1 s_2 \alpha)$ , cioè indicando  $s_1, s_2$  le molteplicità delle due curve ed  $\alpha$  la loro molteplicità d'intersezione (numero delle intersezioni assorbite) nel punto stesso <sup>(2)</sup>.

<sup>(1)</sup> Vedasi una completa bibliografia sull'argomento nell'importante libro di Brill e Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen ...* (G. Reimer, Berlin, 1893) pag. 350 e segg.

<sup>(2)</sup> Bertini, *Zum fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen.* (Math. Ann. t.<sup>o</sup> 34, 1889).

In particolare si ha il teorema che ogni curva che abbia in un tale punto  $(s_1 s_2 \alpha)$ , comune alle due curve, una molteplicità espressa dal suddetto numero, appartiene al loro modulo <sup>(1)</sup>.

La presente Nota che fa seguito all'altra pubblicata in questi medesimi Rendiconti (vol. 18, fasc. 8°, 1° semestre 1909), la quale richiameremo quando occorra coll'indicazione « Nota 1<sup>a</sup> » <sup>(2)</sup>, dà un teorema che è l'estensione all'iperspazio del precedente teorema del piano.

1. Sieno  $F_1, F_2, \dots, F_r$  ipersuperficie di  $S_r$  degli ordini  $n_1, n_2, \dots, n_r$  aventi soltanto punti comuni, e ciascuno tale punto  $P_i (i=1, 2, \dots)$  sia  $(s_1^{(i)} s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)} \alpha^{(i)})$ , cioè sia multiplo secondo  $s_1^{(i)}$  per  $F_1$ , multiplo secondo  $s_2^{(i)}$  per  $F_2, \dots$ , multiplo secondo  $s_r^{(i)}$  per  $F_r$  e sia di molteplicità d'intersezione  $\alpha^{(i)}$  per le  $r$  ipersuperficie, onde  $\sum_i \alpha^{(i)} = n_1 n_2 \dots n_r$  <sup>(3)</sup>.

Consideriamo  $r$  nuove ipersuperficie  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_r$  degli ordini stessi  $n_1, n_2, \dots, n_r$  delle  $F_1, F_2, \dots, F_r$  e che abbiano ordinatamente in uno dei punti  $P_i$ , ad es.  $P_1$ , le stesse molteplicità  $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_r^{(1)}$ , che vi hanno queste ipersuperficie, ma che però presentino in  $P_1$  il caso semplice ed inoltre non abbiano comuni, fuori del punto  $P_1$ , che punti semplici distinti, il numero dei quali sarà quindi  $n_1 n_2 \dots n_r - s_1 s_2 \dots s_r$ . Ad es., si può prendere per  $\Phi_1$  una ipersuperficie costituita di un cono di ordine  $s_1^{(1)}$  avente il vertice nel punto  $P_1$  e del resto generico e di  $n_1 - s_1^{(1)}$  iperpiani generici; e similmente per  $\Phi_2, \dots, \Phi_r$ . Allora le  $r$  ipersuperficie  $F_1^*, F_2^*, \dots, F_r^*$  variabili genericamente negli  $r$  fasci

$$F_1^* = F_1 + \varepsilon_1 \Phi_1 = 0, F_2^* = F_2 + \varepsilon_2 \Phi_2 = 0, \dots, F_r^* = F_r + \varepsilon_r \Phi_r = 0,$$

hanno pure in  $P_1$  le molteplicità  $s_1, s_2, \dots, s_r$ , presentano nel punto stesso il caso semplice e si segano ulteriormente in  $n_1 n_2 \dots n_r - s_1 s_2 \dots s_r$  punti semplici distinti, che diremo punti  $Q$ . Ad esse possiamo quindi applicare il teorema di König (Nota 1<sup>a</sup>, n. 4). Ciò faremo prendendo una ipersuperficie  $F$  costituita dell'iperpiano, contato  $s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_r^{(1)} - r + 1$  volte, proiettante  $P_1$  da un  $S_{r-2}^{(1)}$  generico (fisso) e di altri iperpiani proiettanti i punti  $Q$  dallo stesso  $S_{r-2}^{(1)}$  e da altri  $S_{r-2}^{(2)}, \dots, S_{r-2}^{(r)}$  pure generici (fissi), in base alla seguente considerazione.

Quando s'imagina che i parametri (indipendenti)  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$  degli  $r$  fasci tendano a zero, le  $F_1^*, F_2^*, \dots, F_r^*$  tendono alle  $F_1, F_2, \dots, F_r$  ed i

<sup>(1)</sup> Cfr. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria*... (Rend. del R. Ist. lomb., serie II, vol. 24, 1891), n. 18.

<sup>(2)</sup> In questa Nota 1<sup>a</sup> si correggano due errori di scrittura: uno nel n. 3, ove vanno cambiati i segni di  $s_{i1}, s_{i2}, \dots$  nelle espressioni degli  $h$  sistemi lineari, ..., ed uno nel n. 4, ove va soppresso il  $-1$  nelle espressioni di  $D_r(n; n_1 \dots n_r), D_r(s-1; s_1 \dots s_r)$ .

<sup>(3)</sup> Cfr., ad es., l'Appendice al mio libro: *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, n. 5, cap. I.



punti Q ai punti  $P_i$ : in particolare vi saranno  $\alpha^{(1)} - s_1^{(1)} s_2^{(1)} \dots s_r^{(1)}$  punti Q, che diremo formare il 1° gruppo, che tendono a  $P_1$ , e vi saranno  $\alpha^{(i)} (i=2, \dots)$  punti Q, che diremo formare l'*i*esimo gruppo, che tendono al punto  $P_i$ . Or bene, dall'  $S_{r-2}^{(i)} (i=1, 2, \dots)$  proiettiamo i punti Q dell' *i*esimo gruppo e tutti questi iperpiani aggiungiamo a quello detto sopra. Avremo una ipersuperficie  $F^*$  dell'ordine

$$\alpha^{(1)} - s_1^{(1)} s_2^{(1)} \dots s_r^{(1)} + s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_r^{(1)} - r + 1 + \alpha^{(2)} + \alpha^{(3)} + \dots + \alpha^{(r)},$$

alla quale potrà appunto applicarsi il teorema di König, cioè si avrà identicamente

$$F^* = A_1^* F_1^* + A_2^* F_2^* + \dots + A_r^* F_r^*,$$

le  $A_1^*, A_2^*, \dots, A_r^*$  essendo forme opportune.

Facciamo ora convergere a zero, come si è detto sopra, i parametri  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r$  degli  $r$  fasci: al limite la precedente identità si trasformerà in quest'altra

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_r F_r,$$

essendo  $A_1, A_2, \dots, A_r$  limiti delle  $A_1^*, A_2^*, \dots, A_r^*$  ed  $F$  costituita manifestamente di

$$\alpha^{(1)} - s_1^{(1)} s_2^{(1)} \dots s_r^{(1)} + s_1^{(1)} + s_2^{(1)} + \dots + s_r^{(1)} - r + 1$$

iperpiani coincidenti in quello che proietta  $P_1$  dall'  $S_{r-2}^{(1)}$ , di  $\alpha^{(2)}$  iperpiani coincidenti in quello che proietta  $P_2$  dall'  $S_{r-2}^{(2)}, \dots$  e di  $\alpha^{(r)}$  iperpiani coincidenti in quello che proietta  $P_r$  dall'  $S_{r-2}^{(r)}$ .

Variando gli  $S_{r-2}^{(i)}$ , si può adunque intanto concludere che ogni ipersuperficie costituita di un iperpiano passante per un punto  $P_i$  e contato

$$\alpha^{(i)} - s_1^{(i)} s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)} + s_1^{(i)} + s_2^{(i)} + \dots + s_r^{(i)} - r + 1$$

volte e di iperpiani passanti per gli altri punti  $P_i$ , ciascuno contato  $\alpha^{(i)}$  volte, appartiene al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_r)$ .

2. Facciamo ora la seguente osservazione. Al modulo di tutte le ipersuperficie di ordine  $t$  di  $S_r$  (cioè al modulo di  $\binom{t+r}{r}$  di esse linearmente indipendenti) appartengono tutte le ipersuperficie di ordine  $k \geq t$ . La cosa è ovvia, quando si noti che ogni termine dell'equazione di una tal ipersuperficie contiene un fattore (o più, se  $k > t$ ) di ordine  $t$ . Per una proprietà notissima <sup>(1)</sup>, si può anche dire che una ipersuperficie d'ordine  $k \geq t$  appar-

(<sup>1</sup>) Cfr., ad es., il n. 3 (ultimo alinea) cap. 10° del mio libro citato.

tiene al modulo degli iperpiani  $t^{upli}$  di  $S_r$  (cioè al modulo di  $\binom{t+r}{r}$  di essi linearmente indipendenti).

3. Una ipersuperficie d'ordine  $n$  che abbia in un punto  $P$  un punto  $t^{uplo}$  appartiene al modulo di tutti i coni d'ordine  $t$  che hanno il vertice in  $P$  (cioè al modulo di  $\binom{t+r-1}{r-1}$  di essi linearmente indipendenti). Infatti, assunto  $P$  come vertice  $x_0 = 1, x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$  della piramide fondamentale, l'equazione della ipersuperficie è

$$u_t x_0^{n-t} + u_{t+1} x_0^{n-t-1} + \dots + u_n = 0,$$

ove  $u_t, u_{t+1}, \dots, u_n$  sono coni, degli ordini indicati dagli indici, aventi il vertice nel punto  $P$ : ma, per l'osservazione del n. 2, questi coni appartengono al modulo di tutti i coni d'ordine  $t$  aventi il vertice nel punto stesso e quindi è provato l'asserto.

Il quale si può allargare ad un numero qualunque (finito) di punti. Si ha cioè che una ipersuperficie  $F$ , di ordine  $n$  abbastanza elevato, con punti  $t_i^{upli}$  in punti  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) appartiene al modulo delle ipersuperficie che si ottengono prendendo  $\binom{t_1+r-1}{r-1}$  coni d'ordine  $t_1$ , linearmente indipendenti, col vertice in  $P_1$ ,  $\binom{t_2+r-1}{r-1}$  coni d'ordine  $t_2$ , linearmente indipendenti, col vertice in  $P_2, \dots$  e poi associando ciascuno dei primi a ciascuno dei secondi ....: o anche (n. 2), prendendo  $\binom{t_1+r-1}{r-1}$  iperpiani  $t_1^{upli}$ , linearmente indipendenti, passanti per  $P_1$ ,  $\binom{t_2+r-1}{r-1}$  iperpiani  $t_2^{upli}$ , linearmente indipendenti, passanti per  $P_2, \dots$  e poi associando ciascuno dei primi a ciascuno dei secondi .... La proprietà, essendo vera, come si vide sopra, per un punto, si ammetterà per  $y$  dei punti  $P_i$ , cioè per  $P_1, P_2, \dots, P_y$ , e si dimostrerà che sussiste aggiungendo a questi un altro  $P_{y+1}$  dei punti stessi.

La  $F$ , per l'ipotesi ammessa, si potrà scrivere (ad es.) nella forma

$$F = \sum A_{i_1 i_2 \dots i_y} H_{i_1}^{t_1} K_{i_2}^{t_2} \dots L_{i_y}^{t_y}$$

essendo  $H_{i_1}, K_{i_2}, \dots, L_{i_y}$  forme lineari e precisamente:  $H_{i_1}^{t_1}, H_{i_2}^{t_1}, \dots, \binom{t_1+r-1}{r-1}$

iperpiani  $t_1^{upli}$  linearmente indipendenti passanti per  $P_1$ ;  $K_{i_2}^{t_2}, K_{i_3}^{t_2}, \dots, \binom{t_2+r-1}{r-1}$

iperpiani  $t_2^{upli}$  linearmente indipendenti passanti per  $P_2$ ; .... Ora avvertasi che il procedimento (del Severi) esposto nella prima parte del n. 2 della



Nota 1<sup>a</sup> ha significato anche se ivi si abbia  $s_1 = s_2 = \dots s_h = 0$  <sup>(1)</sup>; il che, nel caso nostro, poichè le ipersuperficie  $H_{i_1}^{t_1} K_{i_2}^{t_2} \dots L_{i_y}^{t_y}$  non passano per il punto  $P_{y+1}$  e questo punto è multiplo secondo  $t_{y+1}$  per  $F$ , conduce alla conseguenza che (appunto supponendo l'ordine  $n$  di  $F$  abbastanza elevato) si potranno scegliere le  $A_{i_1 i_2 \dots i_y}$  così che abbiano nello stesso punto  $P_{y+1}$  questa medesima molteplicità  $t_{y+1}$ . Ma allora si avrà identicamente (n. 2)

$$A_{i_1 i_2 \dots i_y} = \sum B_{i_{y+1}} T_{i_{y+1}}^{t_{y+1}}$$

essendo  $T_1^{t_{y+1}}, T_2^{t_{y+1}}, \dots \binom{t_{y+1} + r - 1}{r - 1}$  iperpiani  $t_{y+1}^{upli}$  linearmente indipendenti passanti per  $P_{y+1}$ . Sostituendo nella identità superiore le precedenti espressioni delle  $A_{i_1 i_2 \dots i_y}$ , si conclude quanto si è affermato.

4. In virtù della proposizione del numero precedente si ricava immediatamente da quella del n. 1, mantenute le denominazioni di questo numero, la proprietà, che *ogni ipersuperficie, d'ordine  $n$  abbastanza alto, avente la molteplicità <sup>(2)</sup>*

$$\sigma^{(i)} = \alpha^{(i)} - s_1^{(i)} s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)} + s_1^{(i)} + s_2^{(i)} + \dots + s_r^{(i)} - r + 1$$

*in un punto  $P_i$  e la molteplicità  $\alpha^{(i)}$  in ogni altro punto  $P_i$  appartiene al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_r)$ .*

<sup>(1)</sup> Basta osservare che nella  $\sum a_i \Phi_i = 0$  le  $\Phi_i$  saranno allora costanti non nulle, e notare che, con considerazioni analoghe a quelle del n. 5 della Nota di Severi: *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* (Atti della R. Acc. di Torino, vol. 41, 1905) anzi più semplici (non occorrendo l'impiego del teorema ivi applicato), si dimostra subito che *tutte le soluzioni  $X_i$  della*

$$X_1 c_1 + X_2 c_2 + \dots + X_h c_h = 0,$$

*ove le  $c_1, c_2, \dots, c_h$  sono costanti non nulle ed  $h$  è qualsiasi, si possono scrivere nella forma*

$$X_i = \sum_j p_{ij} c_j \quad (i = 1, 2, \dots, h),$$

*le  $p_{ij}$  essendo  $h^2$  forme dello stesso ordine soddisfacenti alle  $p_{ii} = 0, p_{ij} = -p_{ji}$  e del resto arbitrarie.*

<sup>(2)</sup> Si noti che (abbandonati gli indici superiori) si ha  $\sigma \leq \alpha$ , perchè

$$s_1 s_2 \dots s_r - s_1 - s_2 - \dots - s_r + r - 1 \geq 0.$$

Questa è vera infatti per  $r = 2$ , giacchè il primo membro è in questo caso  $(s_1 - 1)(s_2 - 1)$ : e allora, ammessa per  $r - 1$ , cioè ammesso che sia

$$s_1 s_2 \dots s_{r-1} - s_1 - s_2 - \dots - s_{r-1} + r - 2 \geq 0,$$

segue anche per  $r$ , moltiplicando quest'ultima per  $s_r$  e valendosi della  $s_i s_r \geq s_i + s_r - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, r - 1$ ).

Si mostrerà ora che, sempre per un ordine  $n$  sufficientemente elevato, *tutte* le ipersuperficie di ordine  $n$  che hanno in *ciascun* punto  $P_i$  la molteplicità  $\sigma^{(i)}$  costituiscono il sistema lineare congiungente i sistemi lineari di ipersuperficie che hanno in *un solo* punto  $P_i$  quella molteplicità  $\sigma_i$  e negli altri la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ : e però quelle ipersuperficie appartengono al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_r)$ .

In vero il sistema lineare di ipersuperficie (sempre d'ordine  $n$  sufficientemente alto) che hanno in  $P_1$  la molteplicità  $\sigma^{(1)}$  e negli altri punti  $P_i$  la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ , cioè di dimensione

$$\binom{n+r}{r} - 1 - \binom{\sigma^{(1)} - 1 + r}{r} - \binom{\alpha^{(2)} - 1 + r}{r} - \binom{\alpha^{(3)} - 1 + r}{r} - \dots$$

e l'altro sistema lineare di ipersuperficie che hanno in  $P_2$  la molteplicità  $\sigma^{(2)}$  e negli altri punti  $P_i$  la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ , cioè di dimensione

$$\binom{n+r}{r} - 1 - \binom{\alpha^{(1)} - 1 + r}{r} - \binom{\sigma^{(2)} - 1 + r}{r} - \binom{\alpha^{(3)} - 1 + r}{r} - \dots$$

hanno manifestamente per sistema lineare d'intersezione quello composto delle ipersuperficie che hanno in  $P_1$  la molteplicità  $\alpha^{(1)} (\geq \sigma^{(1)})$ , in  $P_2$  la molteplicità  $\alpha^{(2)} (\geq \sigma^{(2)})$  e negli altri punti  $P_i$  pure la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ , sistema lineare avente quindi la dimensione

$$\binom{n+r}{r} - 1 - \binom{\alpha^{(1)} - 1 + r}{r} - \binom{\alpha^{(2)} - 1 + r}{r} - \binom{\alpha^{(3)} - 1 + r}{r} - \dots$$

Il sistema congiungente i suddetti due sistemi, che (avendo per equazione la somma delle loro equazioni) è di ipersuperficie aventi in  $P_1$  la molteplicità  $\sigma^{(1)} (\leq \alpha^{(1)})$ , in  $P_2$  la molteplicità  $\sigma^{(2)} (\leq \alpha^{(2)})$  e negli altri punti  $P_i$  la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ , è quindi di dimensione

$$\binom{n+r}{r} - 1 - \binom{\sigma^{(1)} - 1 + r}{r} - \binom{\sigma^{(2)} - 1 + r}{r} - \binom{\alpha^{(3)} - 1 + r}{r} - \dots:$$

sicchè esso sistema congiungente è proprio costituito da *tutte* le ipersuperficie d'ordine  $n$  che hanno in  $P_1, P_2, P_i$  quelle molteplicità.

In modo affatto simile si vede che il sistema congiungente quest'ultimo sistema e l'altro che ha in  $P_3$  la molteplicità  $\sigma^{(3)}$  e negli altri punti  $P_i$  la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ , cioè il sistema congiungente i tre sistemi che hanno rispettivamente in  $P_1, P_2, P_3$  le molteplicità  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$  e negli altri (cioè esclusi ordinatamente  $P_1, P_2, P_3$ ) la molteplicità  $\alpha^{(i)}$ , è costituito da *tutte*



le ipersuperficie che hanno in  $P_1, P_2, P_3$  le molteplicità  $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}$  e negli altri (cioè esclusi questi tre) le molteplicità  $\alpha^{(i)}$ : e così di seguito.

La nostra affermazione è quindi dimostrata per  $n$  abbastanza alto: e si trova allora che è vera per qualunque valore di  $n$  ripetendo la stessa considerazione fatta nel n. 4 (penultimo alinea) della Nota 1<sup>a</sup>.

Risulta quindi dimostrato il seguente teorema (comprendente la proposizione del n. 1 e l'altra enunciata al principio del presente numero):

*Se  $r$  ipersuperficie  $F_1, F_2, \dots, F_r$  di  $S_r$  si segano in un numero finito di punti, ciascuno dei quali sia  $(s_1 s_2 \dots s_r \alpha)$  cioè  $s_1^{uplo}$  per  $F_1, s_2^{uplo}$  per  $F_2, \dots, s_r^{uplo}$  per  $F_r$  e di molteplicità d'intersezione  $\alpha$  per le  $r$  ipersuperficie, ogni ipersuperficie  $F$  che abbia in ciascuno tale punto la molteplicità*

$$\alpha - s_1 s_2 \dots s_r + s_1 + s_2 + \dots + s_r - r + 1$$

*appartiene al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_r)$ .*

5. Si può estendere il teorema precedente, come Torelli ha fatto per il teorema di König nel n. 4 della Nota: *Sopra certe estensioni del teorema di Noether  $Af + Bq$*  (Atti della R. Acc. delle Sc. di Torino, vol. 41, 1905), giovandosi del medesimo lemma dimostrato nel n. 3 della stessa Nota. Si osservi anzi che a questo lemma si può dare l'aspetto più generale: — *Se nell'  $S_r$  si hanno  $h < r$  ipersuperficie  $F_1, F_2, \dots, F_h$  segantisi in una  $\Phi_{r-h}$  (anche con parti multiple) ogni ipersuperficie  $F$  la quale seghi sopra un  $S_h$  variabile entro un fascio generico (cioè variabile in un  $S_{h+1}$  generico per un suo  $S_{h-1}$  generico) una ipersuperficie appartenente al modulo sezione del modulo  $(F_1 F_2 \dots F_h)$ , appartiene a quest'ultimo modulo —. Basta applicare successivamente il lemma nella forma data dal Torelli.*

Ora diciamo che una parte irriducibile della  $\Phi_{r-h}$  intersezione di  $h$  ipersuperficie  $F_1, F_2, \dots, F_h$ , multipla rispettivamente per queste secondo  $s_1, s_2, \dots, s_h$ , è di molteplicità d'intersezione  $\alpha$  per le ipersuperficie stesse e indichiamola con  $(s_1 s_2 \dots s_h \alpha)$ , quando un suo punto generico è tale per le sezioni delle  $F_1, F_2, \dots, F_h$  fatte con un  $S_h$  generico per il punto stesso. Allora segue subito dal teorema del n. 4, in virtù del lemma suddetto, quest'altro teorema: — *Se  $h (< r)$  ipersuperficie  $F_1, F_2, \dots, F_h$  di  $S_r$  si segano in una  $\Phi_{r-h}$  qualsiasi e ciascuna parte irriducibile di  $\Phi_{r-h}$  è  $(s_1 s_2 \dots s_h \alpha)$ , ogni ipersuperficie  $F$ , che passi per ciascuna tal parte*

$$\alpha - s_1 s_2 \dots s_h + s_1 + s_2 + \dots + s_h - h + 1$$

*volte, appartiene al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_h)$ .*

Infatti, segnando con un  $S_h$  generico, si avranno in esso le sezioni di  $F_1, F_2, \dots, F_h$  aventi solo punti comuni  $(s_1 s_2 \dots s_h \alpha)$ . Per il teorema del n. 4, la sezione di  $F$  apparterrà al modulo di quelle sezioni e quindi, per il lemma, la  $F$  apparterrà al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_h)$ .

6. I due teoremi dei nn. 4, 5 danno come immediata conseguenza quest'altro: — Se nell'  $S_r$  si hanno  $h (\leq r)$  ipersuperficie  $F_1, F_2, \dots, F_h$  che si segano in una  $\Phi_{r-h}$ , di cui ciascuna parte irriducibile (o ciascun punto se  $r = h$ ) sia  $(s_1 s_2 \dots s_h \alpha)$ , e se una ipersuperficie  $F$  passa comunque per  $\Phi_{r-h}$ , la  $F^\sigma$  appartiene al modulo  $(F_1 F_2 \dots F_h)$ , essendo  $\sigma$  non minore del più grande dei numeri

$$\alpha - s_1 s_2 \dots s_h + s_1 + s_2 + \dots + s_h - h + 1.$$

È questo un caso particolare di un teorema dovuto ad Hilbert <sup>(1)</sup>, salvo la determinazione del limite inferiore di  $\sigma$ , noto nel caso  $r = 2$  <sup>(2)</sup>, e anche nel caso di  $r$  qualunque, quando si presenti il caso semplice ( $\alpha = s_1 s_2 \dots s_h$ ), per i teoremi di König e Torelli.

Colgo l'occasione della presente pubblicazione per formulare in modo semplice e preciso le  $h - 2$  ipotesi sufficienti per l'applicazione della formola (6), cap. 1° del mio libro citato, formola di cui si è fatto uso nella Nota 1<sup>a</sup>.

Le dette  $h - 2$  ipotesi sono:

1<sup>a</sup> Lo spazio  $S_{a_{i_1}}$  è in posizione regolare rispetto ad  $S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_{i_1-1}}$ , ove  $i_1 > 2$ ;

2<sup>a</sup> Lo spazio  $S_{a_{i_1 i_2}}$  è in posizione regolare rispetto ad  $S_{a_{i_1 i_2}}, S_{a_{2 i_2}}, \dots, S_{a_{i_1-1 i_2}}$ , ove  $i_2 > i_1 > 2$ ;

3<sup>a</sup> Lo spazio  $S_{a_{i_1 i_2 i_3}}$  è in posizione regolare rispetto ad  $S_{a_{i_1 i_2 i_3}}, S_{a_{2 i_2 i_3}}, \dots, S_{a_{i_1-1 i_2 i_3}}$ , ove  $i_3 > i_2 > i_1 > 2$ .

...

$(h - 3)^a$  Lo spazio  $S_{a_{i_1 i_2 \dots i_{h-3}}}$  è in posizione regolare rispetto ad  $S_{a_{i_1 i_2 \dots i_{h-3}}}, S_{a_{2 i_2 \dots i_{h-3}}}, \dots, S_{a_{i_1-1 i_2 \dots i_{h-3}}}$ , ove  $i_{h-3} > i_{h-4} > \dots > i_2 > i_1 > 2$ ;

$(h - 2)^a$  Lo spazio  $S_{a_{3 4 \dots h}}$  è in posizione regolare rispetto ad  $S_{a_{1 4 5 \dots h}}, S_{a_{2 4 5 \dots h}}, \dots$ .

S'intende bene che in queste ipotesi si debbono mettere per le considerate successioni degli indici  $i_1 i_2 \dots$  tutte le combinazioni dei numeri  $3 4 \dots h$  compatibili colle limitazioni indicate ed inoltre che, variando l'ordine degli spazi  $S_{a_1}, S_{a_2}, \dots, S_{a_h}$ , si hanno altri gruppi di  $h - 2$  ipotesi,

(1) Ueber die vollen Invariantensystem (Math. Ann., t. 42, 1893), II, § 3.

(2) Mia Nota citata: Rappresentazione di una forma ternaria..., n. 18.



ciascuno dei quali è pure sufficiente per la validità della suddetta formula (6).

Noterò anche che le  $h - 2$  ipotesi sopra enunciate si possono compendiare in questa unica:

Lo spazio  $S_{a_{i_1 i_2 \dots i_l}}$  è in posizione regolare rispetto ad  $S_{a_{i_1 i_2 \dots i_l}}, S_{a_{i_2 i_3 \dots i_l}}, \dots, S_{a_{i_{l-1} i_l \dots i_l}}$ , dovendosi porre per  $i_1 i_2 \dots i_l$  tutte le combinazioni di specie  $l (= 1, 2, \dots, h - 2)$  dei numeri  $3, 4, \dots, h$  compatibili colle limitazioni  $i_l > i_{l-1} > \dots > i_2 > i_1 > 2$ .

**Matematica.** — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota 3<sup>a</sup> del Socio E. BERTINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non-euclideo in tetraedri ed ottaedri regolari.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Riprendo una questione che trattai in altra mia Nota, ove cercai tutti i modi di riempire lo spazio non-euclideo con poliedri regolari congruenti fra loro <sup>(1)</sup>.

Trovai, allora, soltanto due modi di effettuare una tale divisione, e cioè:

1<sup>a</sup>) in ottaedri regolari con angoli piani retti e diedri retti;

2<sup>a</sup>) in dodecaedri regolari con angoli piani nulli e diedri retti.

Ma in realtà esistono, come venne poi osservato dal Fricke, due e due soli altri modi di divisione, e cioè in tetraedri e dodecaedri regolari con angoli piani nulli e diedri  $= \frac{\pi}{3}$  <sup>(2)</sup>.

Scopo della presente comunicazione è di caratterizzare *aritmeticamente* i gruppi di sostituzioni lineari di 1<sup>a</sup> e di 2<sup>a</sup> specie che nascono, secondo il principio di Poincaré (Acta Math., vol. 3), combinando tutte le riflessioni sulle facce dei tetraedri o degli ottaedri regolari appartenenti a due delle

<sup>(1)</sup> *Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in poliedri regolari.* Questi Rendiconti, luglio 1893.

<sup>(2)</sup> L'omissione di questi due tipi nella Nota citata è dovuta allo scambio, avvenuto ivi al n. 3, dell'angolo rettilineo misura del diedro col suo supplemento. Con questa rettificazione si riconosce immediatamente l'esistenza degli altri due tipi del testo.

quattro divisioni. Si vedrà che essi sono semplicemente sottogruppi *congruenziali* del gruppo delle sostituzioni unimodulari

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

con coefficienti interi appartenenti al campo immaginario quadratico  $(1, \varepsilon)$  o  $(1, i)$  della radice cubica  $\varepsilon$  o della radice quarta  $i$  dell'unità.

2. Ponendo

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt[3]{3}}{2} \quad (\text{radice cubica dell'unità}),$$

consideriamo quel gruppo  $G$  di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

i cui coefficienti  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sono interi nel campo  $(1, \varepsilon)$ , e per le quali inoltre sono soddisfatte le congruenze

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1 - \varepsilon},$$

rispetto al modulo primo  $1 - \varepsilon$ . Ampliamo il gruppo  $G$  colla riflessione  $z' = z_0$  <sup>(1)</sup>, permutabile con  $G$ , ed avremo il gruppo ampliato, che indicheremo con  $G_0$ , costante delle sostituzioni di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie

$$\left\{ \begin{array}{l} a) \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \\ b) \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \end{array} \right. \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1; \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1 - \varepsilon}.$$

Dimostreremo che il poliedro fondamentale di  $G_0$  è appunto il tetraedro regolare con angoli piani nulli e diedri  $= \frac{\pi}{3}$ .

Osserviamo prima di tutto il periodo delle sostituzioni ellittiche contenute in  $G$ . La  $a)$  sarà ellittica quando  $\alpha + \delta$  sia reale e minore, in valore assoluto, di 2; sarà per ciò

$$\alpha + \delta = 0 \quad \text{o} \quad \alpha + \delta = \pm 1.$$

Ma il primo caso è impossibile, perchè non può aversi insieme

$$\alpha + \delta = 0 \quad \alpha\delta \equiv 1 \pmod{3},$$

e resta per ciò possibile solo il caso  $\alpha + \delta = \pm 1$  ove le corrispondenti

(<sup>1</sup>) Colla notazione di Hermite  $z_0$  significa la coniugata di  $z$ .



sostituzioni ellittiche hanno il periodo 3. Considerando ora le sfere (piani) di riflessione di  $G_0$ , segue di qui: *Se due sfere di riflessione di  $G_0$  si attraversano, esse si tagliano sotto l'angolo  $\frac{\pi}{3}$  o  $\frac{2\pi}{3}$ .*

Ed ora ricerchiamo effettivamente tutte le riflessioni contenute in  $G_0$ . Esse sono date da quelle sostituzioni  $b)$  in cui  $\alpha, \delta$  sono coniugati immaginari e  $\beta, \gamma$  sono puramente immaginari, ed hanno quindi la forma

$$(1) \quad z' = \frac{(a_1 + a_2 \varepsilon) \cdot z_0 + i b_1 \sqrt[3]{3}}{i c_1 \sqrt[3]{3} \cdot z_0 + (a_1 + a_2 \varepsilon^2)},$$

dove  $a_1, a_2, b_1, c_1$  sono interi razionali, soddisfacenti alla equazione

$$(2) \quad (a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 12b_1c_1 = 4.$$

I piani di riflessione si ottengono in particolare quando  $c_1 = 0$ ; e poichè allora la (2) ha le sole soluzioni

$$\begin{aligned} a_2 - 2a_1 &= \pm 2, & a_2 &= 0 \\ a_2 - 2a_1 &= \pm 1, & a_2 &= \pm 1, \end{aligned}$$

si vede che: *si ottengono tutti i piani di riflessione di  $G_0$  dalle equazioni*

$$\eta = \frac{b\sqrt[3]{3}}{2}, \quad \xi\sqrt[3]{3} \pm \eta = b\sqrt[3]{3},$$

*percorrendo  $b$  tutti gli interi razionali.*

Questi piani di riflessione dividono per ciò il semispazio  $\zeta > 0$  in prismi triangolari retti congruenti, a base equilatera. Si consideri uno di tali prismi, per es. quello racchiuso dai tre piani

$$I) \quad \eta = 0, \quad II) \quad \eta = \xi\sqrt[3]{3}, \quad III) \quad \xi\sqrt[3]{3} + \eta = \sqrt[3]{3},$$

nell'interno del quale non penetra più alcun piano di riflessione. La base di questo prisma è il triangolo equilatero nel piano complesso  $z = \xi + i\eta$ , coi tre vertici nei punti

$$0, 1, \frac{1 + i\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Consideriamo ora le sfere di riflessione ( $c_1 \neq 0$ ), coll'equazione

$$(3) \quad \left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{2c_1\sqrt[3]{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt[3]{3}}\right)^2,$$

i numeri interi  $a_1, a_2, c_1$  soddisfacendo alla congruenza

$$(4) \quad (a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 \equiv 4 \pmod{12 c_1}.$$

Fra queste sfere abbiamo la seguente:

$$IV) \quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

corrispondente alla riflessione di  $G_0$

$$s' = \frac{\varepsilon s_0}{i\sqrt{3}s_0 + \varepsilon^2};$$

essa ha per equatore (per sezione col piano  $\xi\eta$ ) il circolo circoscritto al triangolo equilatero considerato. I tre piani di riflessione I) II) III) e la sfera IV) racchiudono un poliedro  $\Pi$ , che è la porzione del prisma esterno alla sfera IV), ed è appunto un tetraedro regolare con diedri  $= \frac{\pi}{3}$  e coi quattro vertici

$$V_1 \equiv (0, 0, 0) \quad , \quad V_2 \equiv (1, 0, 0) \quad , \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) \\ V_4 \equiv (0, 0, \infty),$$

che nella metrica non-euclidea sono tutti situati a distanza infinita.

3. Proveremo ora che il tetraedro regolare  $\Pi$  è il poliedro fondamentale di  $G_0$  dimostrando successivamente queste due proprietà:

1<sup>a</sup>) Nessuna sfera di riflessione di  $G_0$  attraversa il tetraedro  $\Pi$ .

2<sup>a</sup>) Nessuna sostituzione di  $G_0$ , diversa dall'identità, trasforma  $\Pi$  in sè medesimo.

Per dimostrare la prima asserzione cominciamo dall'osservare che, il tetraedro  $\Pi$  avendo diedri  $= \frac{\pi}{3}$ , nessuna sfera (piano) di riflessione di  $G_0$  può penetrare in  $\Pi$  attraverso uno spigolo, poichè taglierebbe allora le facce concorrenti in quello spigolo sotto un angolo  $< \frac{\pi}{3}$ . Dunque una sfera di riflessione di  $G_0$  che attraversasse  $\Pi$ , dovrebbe contenere *nel suo interno* almeno uno dei tre vertici  $V_1, V_2, V_3$ . Vediamo se ciò è possibile.

Secondo le (3), (4) l'equazione di una sfera di riflessione di  $G_0$  si può scrivere

$$(5) \quad \left(\xi - \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b}{2c\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c^2},$$



dove  $a, b, c$  sono interi razionali soddisfacenti alla congruenza

$$(6) \quad 3a^2 + b^2 \equiv 4 \pmod{12c},$$

dalla quale risulta

$$(7) \quad b \equiv \pm 1 \pmod{3}.$$

Ora, perchè la sfera (5) contenga nel suo interno  $V_1$  o  $V_2$ , o  $V_3$ , dovranno rispettivamente verificarsi le disequaglianze

$$(\alpha) \quad 3a^2 + b^2 < 4, \text{ per } V_1$$

$$(\beta) \quad 3(2c - a)^2 + b^2 < 4, \text{ per } V_2$$

$$(\gamma) \quad 3(c - a)^2 + (3c - b)^2 < 4, \text{ per } V_3.$$

Ma poichè, a causa della (7),  $b$  o  $3c - b$  non possono essere nulli e sono quindi uguali a  $\pm 1$ , ne seguirebbe rispettivamente

$$a = 0, \text{ o } a = 2c, \text{ o } a = c,$$

ciò che è incompatibile colla congruenza (6). La prima proprietà è dunque stabilita.

Venendo alla seconda proprietà osserviamo che, il tetraedro  $II$  essendo regolare, esso ammette un gruppo tetraedrale ampliato di 24 movimenti in sè, e cioè 12 di 1<sup>a</sup> e 12 di 2<sup>a</sup> specie; ma, come ora si vedrà, nessuno di essi, esclusa l'identità, appartiene  $G_0$ .

Per le sostituzioni  $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  corrispondenti ai 12 movimenti del gruppo tetraedrale di  $II$ , scrivendole sotto forma unimodulare, troviamo subito

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon^2 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} -\varepsilon^2 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cc} \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} -\varepsilon & 0 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{cc} \varepsilon & -\varepsilon \\ 0 & \varepsilon^2 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} -1 & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{cc} \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon \end{array} \right), \end{array} \right.$$

dove abbiamo scritto nella prima riga le 4 costituenti il sottogruppo invariante quadrimio (Vierergruppe). Nessuna di queste, salvo la prima (l'identità), appartiene a  $G$ .

Combinando queste 12 sostituzioni colla riflessione sul piano  $\xi = \frac{1}{2}$

$$z' = -z_0 + 1,$$

che riproduce  $II$ , abbiamo le 12 sostituzioni di 2<sup>a</sup> specie che, avendo determinante  $= -1$ , non appartengono a  $G_0$ .

Così è dimostrata anche la seconda asserzione. Di più osserviamo che le 24 sostituzioni riprodotte  $\Pi$  appartengono tutte al gruppo  $\Gamma_0$  delle sostituzioni di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie a determinante  $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$  con coefficienti interi nel campo  $(1, \varepsilon)$  e lo generano completamente poichè vi figurano le quattro riflessioni fondamentali di  $\Gamma_0$ .

$$z' = z_0, \quad z' = \frac{1}{z_0}, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = -\frac{\varepsilon z_0}{\varepsilon^2}.$$

Questo  $\Gamma_0$  è adunque il più ampio gruppo in cui  $G_0$  è contenuto come sottogruppo invariante (d'indice 24). Concludiamo adunque;

*Il tetraedro regolare  $\Pi$  con angoli piani nulli e diedri  $= \frac{\pi}{3}$  è il poliedro fondamentale del gruppo  $G_0$ . Il più ampio gruppo in cui  $G_0$  è contenuto come sottogruppo invariante è il gruppo completo  $\Gamma_0$ , che consta di tutti i movimenti di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie che trasformano in sè la divisione tetraedrica dello spazio non-euclideo.*

4. Per passare alla divisione ottaedrica consideriamo quel sottogruppo  $G$  del gruppo di Picard di sostituzioni *unimodulari* a coefficienti interi di Gauss, che è definito dalle congruenze

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2};$$

abbiamo così in  $G$  le sostituzioni

$$A) \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ampliamo il gruppo  $G$  in  $G_0$ , aggregandovi le sostituzioni di 2<sup>a</sup> specie

$$B) \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \\ \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{2},$$

e, ricercando il poliedro fondamentale di  $G_0$ , troveremo che esso è appunto l'ottaedro regolare con diedri retti ed angoli piani nulli.

Cominciamo dall'osservare che nelle sostituzioni ellittiche A) di  $G$  può aversi soltanto

$$\alpha + \delta = 0,$$

poichè l'altro caso  $\alpha + \delta = \pm 1$  è incompatibile colla congruenza

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4};$$

dunque le sostituzioni ellittiche di  $G$  hanno esclusivamente il periodo 2. Conseguentemente due sfere di riflessione di  $G_0$  non possono attraversarsi che ortogonalmente.



Ciò premesso, cerchiamo le riflessioni di  $G_0$ , che avranno la forma

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2)z_0 + 2i\beta_1}{2i\gamma_1 z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)},$$

la quaderna  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$  di numeri interi razionali soddisfacendo all'equazione

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\beta_1\gamma_1 = 1.$$

I piani di riflessione si ottengono per  $\gamma_1 = 0$  ed hanno le equazioni

$$\eta = \beta, \quad \xi = \beta,$$

percorrendo  $\beta$  gli interi ordinari. Questi piani dividono per ciò il semispazio  $\zeta > 0$  in prismi retti a base quadrata, fra i quali sceglieremo p. es. quello limitato dai quattro piani

$$I) \quad \eta = 0, \quad II) \quad \xi = 0, \quad III) \quad \eta = 1, \quad IV) \quad \xi = 1,$$

nell'interno del quale non penetra alcun altro piano di riflessione. La base di questo prisma è nel piano  $\xi\eta$  il quadrato coi vertici nei punti

$$0, 1, 1 + i, i.$$

Prendiamo ora le sfere di riflessione, date dall'equazione

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2}{2\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{2\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2\gamma_1}\right)^2,$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$  percorrono le terne di numeri razionali interi che soddisfano alla congruenza

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \equiv 1 \pmod{4\gamma_1}.$$

Il massimo raggio delle sfere di riflessione è  $= \frac{1}{2}$ ; fra queste sfere di massimo raggio consideriamo le quattro

$$\begin{array}{ll} V) & (\xi - \frac{1}{2})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} \\ VI) & \xi^2 + (\eta - \frac{1}{2})^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} \\ VII) & (\xi - \frac{1}{2})^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4} \\ VIII) & (\xi - 1)^2 + (\eta - \frac{1}{2})^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}, \end{array}$$

le quali sono descritte rispettivamente sui lati del quadrato considerato come diametri. La regione del semispazio  $\zeta > 0$  interna al prisma ed esterna alle quattro sfere ci dà appunto un ottaedro regolare  $II$  con angoli piani

nulli e diedri retti. I suoi 6 vertici sono nei punti

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv (0, 0, 0), \quad V_2 \equiv (1, 0, 0), \quad V_3 \equiv (1, 1, 0), \quad V_4 \equiv (0, 1, 0), \\ V_5 &\equiv (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0), \quad V_6 \equiv (0, 0, \infty), \end{aligned}$$

tutti situati a distanza infinita nella metrica non-euclidea. Dimostriamo che:

*L'ottaedro regolare II è il poliedro fondamentale del gruppo  $G_0$ .*

Intanto nessuna sfera di riflessione attraversa **II**, poichè ciò non può avvenire lungo uno spigolo, i diedri essendo già  $= \frac{\pi}{2}$ . Una sfera di riflessione che attraversasse **II** dovrebbe dunque contenere nel suo interno almeno uno dei 5 vertici

$$0, 1, 1+i, i, \frac{1+i}{2}$$

e quindi taglierebbe ortogonalmente tutte e quattro le facce ivi concorrenti; ciò che è impossibile.

Esaminiamo ora i movimenti di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie che sovrappongono **II** a sè stesso e che formano il gruppo ottaedrale ampliato di 48 sostituzioni. Le 24 di 1<sup>a</sup> specie sono le seguenti <sup>(1)</sup>:

$$\left( \begin{array}{cccc} \left( \begin{array}{c} 1, 0 \\ 0, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i, 1 \\ 0, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} -1, 1+i \\ 0, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} -i, i \\ 0, 1 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} i, 0 \\ 1+i, -i \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i, -i \\ 1+i, -i \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i, 1-i \\ 1+i, -i \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i, 1 \\ 1+i, -i \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} 0, 1 \\ -1, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} -1, 1+i \\ -1, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} -(1+i), i \\ -1, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} -i, 0 \\ -1, 1 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} 0, i \\ i, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i, 0 \\ i, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i-1, 1 \\ i, 1 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} -1, 1+i \\ i, 1 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} 1, -1 \\ 1, 0 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} 1+i, -i \\ 1, 0 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} i, 1 \\ 1, 0 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} 0, i \\ 1, 0 \end{array} \right), \\ \left( \begin{array}{c} i, -i \\ 1, 0 \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} 0, -i \\ 1, -(1-i) \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} 1, -i \\ 1, -(1+i) \end{array} \right), & \left( \begin{array}{c} 1+i, -i \\ 1, -(1+i) \end{array} \right). \end{array} \right.$$

Nessuna di esse, esclusa l'identità, appartiene a  $G$ . Le altre 24 si ottengono combinando le 24 precedenti p. es. colla riflessione

$$z' = iz_0$$

e sono ancora tutte fuori di  $G_0$ .

Così è dimostrata la proprietà annunciata e vediamo altresì che il più ampio gruppo  $\Gamma_0$  che contiene  $G_0$  come sottogruppo invariante (d'indice 48) è il gruppo completo delle sostituzioni di 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> specie a coefficienti interi nel campo di Gauss e col determinante  $\alpha\delta - \beta\gamma$  eguale ad una delle unità  $\pm 1, \pm i$ .

(1) Nelle prime due linee scriviamo quelle di un sottogruppo diedrale  $G_8$ .



Fisica. — *Sull' « anodo virtuale » di un tubo di scarica nel campo magnetico.* Nota del Socio A. RIGHI.

Una delle esperienze, che forniscono una prova indiretta in appoggio della mia ipotesi dei « raggi magnetici », è quella che conduce alla produzione di una colonna di luce rosea o rossa sul prolungamento dei raggi stessi, allorchè s'impiega un tubo di scarica cilindrico il cui asse coincida con quello del rocchetto generatore del campo, avente il catodo presso il polo di questo e l'anodo all'estremità di una diramazione laterale. Le deformazioni che subisce la detta colonna rossa per opera di una calamita accostata lateralmente sono precisamente quelle che si osserverebbero, se entro il tubo esistesse un anodo (che può chiamarsi « anodo virtuale »), dal quale partisse quella luce rossa in tutto analoga all'ordinaria colonna positiva di un tubo di Geissler. L'anodo virtuale sarebbe, secondo la teoria, costituito dagli ioni positivi risultanti dallo sciogliersi delle coppie ruotanti elettrone-ione positivo costituenti, secondo la mia ipotesi i raggi magnetici.

Le esperienze descritte nella presente Nota confermano in modo più diretto l'esistenza del supposto anodo virtuale.

Esse si eseguiscano introducendo nel tubo una sonda, cioè l'estremità di un breve e sottile filo metallico comunicante con uno dei serrafile di un galvanometro, di cui l'altro serrafile comunica col suolo. Se realmente ha luogo il periodico accumularsi di ioni positivi in una certa regione del tubo, non appena la sonda giunga in tale regione dovrà osservarsi una deviazione galvanometrica indicante una corrente diretta dalla sonda alla terra.

Lo strumento da me adoperato è un galvanometro a campo fisso che, colla scala posta a m. 1,43 da esso, dà la deviazione di un millimetro per una corrente di  $6,65 \cdot 10^{-10}$  ampère. Esso fu accuratamente isolato, e nella comunicazione colla sonda fu inserita una resistenza di circa 3160 mégohm, costituita da tubi capillari contenenti alcool.

All'apparecchio di scarica fu data o la forma della fig. 1, o quella della fig. 2. In entrambi i casi il catodo (che fu tenuto sempre in comunicazione col suolo) esce di poco dal foro assiale del rocchetto destinato a produrre il campo magnetico, l'intensità del quale decresce rapidamente andando lungo il tubo da destra a sinistra.

Nel tubo fig. 1 sono poste otto sonde fisse distanti 4 cm. una dall'altra, che si cercò di fare sotto ogni rapporto identiche fra loro. Ciascuna di esse consta di un filo di platino di pochi millimetri di lunghezza saldato nel vetro ed esternamente circondato da un piccolo serbatoio con mercurio de-

stinato a stabilire la comunicazione col galvanometro. Ponendo le sonde una dopo l'altra in comunicazione con questo strumento quando non v'è campo magnetico, e la corrente fornita da una batteria di piccoli accumulatori (nel cui circuito è inclusa una fortissima resistenza) passa nel tubo, si hanno deviazioni, che decrescono passando dalla sonda 1 alla 2 e successivamente alle altre sonde sino alla 8. Ciò è ben naturale perchè la sonda comunicante

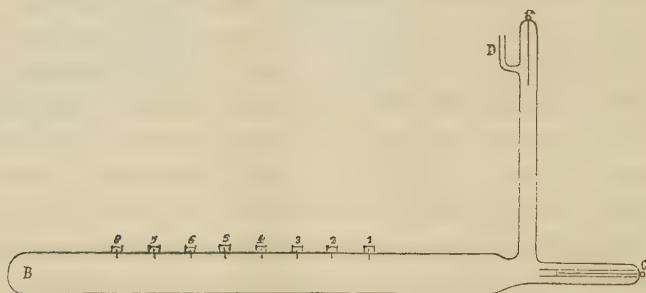


FIG. 1.

col galvanometro funziona da catodo, quantunque assai debolmente stante la enorme resistenza impiegata. Portate le deviazioni come ordinate sopra i punti 1, 2, ..... 8, verificai, che mentre le estremità della maggior parte di esse venivano a trovarsi sempre sopra una curva poco differente da una retta discendente verso sinistra, le estremità delle altre uscivano alquanto da quella curva. Ciò si spiegava naturalmente come effetto di qualche diversità delle corrispondenti sonde, che si cercò di far sparire. Dopo lunghi tentativi ebbi un tubo, di cui una sola sonda sembrava differente dalle altre. Per non prolungare ulteriormente la non facile preparazione di simili tubi mi contentai



FIG. 2.

dell'ultimo ottenuto, ma adoperai solo le sette sonde, che sembravano possedere un identico comportamento.

Il tubo della fig. 2 ha una sola sonda, ma questa può muoversi a piacere lungo il suo asse. Essa consiste in un filo di platino che sporge di qualche millimetro da un lungo cannello di vetro S a cui è saldato, e questo cannello si può far scorrere lungo l'asse dell'apparecchio, spostando un roc-



chetto percorso da un'intensa corrente infilato sul lungo tubo EB, e che trascina il cilindro di ferro F.

Quando il tubo di scarica funziona e si ha deviazione al galvanometro, si nota intorno alla sonda (una delle otto della fig. 1 o l'unica della fig. 2) un debole chiarore azzurro-violetto, dovuto a ciò che la sonda fa da catodo; ma poichè l'aspetto della scarica non resta sensibilmente modificato isolando la sonda, è lecito ammettere che la perturbazione introdotta da questa non abbia molta importanza. Nel caso del tubo della fig. 2, quella debole luminosità si prolunga in certi casi intorno al cannello della sonda, particolarmente quando questa penetra assai nella regione occupata dall'anodo virtuale, ciò che forse toglierebbe fiducia alle esperienze, se queste fossero dirette a determinare la distribuzione del potenziale. Ma, come si vedrà fra poco l'impiego della sonda ebbe uno scopo più modesto.

Per dare idea dei risultati ottenuti riporterò alcune serie di misure, cominciando da alcune realizzate coll'apparecchio fig. 1, nel quale l'aria aveva la pressione di 0,20 mm., mentre la corrente di scarica era assai debole e precisamente di  $62.10^{-6}$  ampère.

1		3		8	
Campo	Deviazione	Campo	Deviazione	Campo	Deviazione
0	115	0	103	0	80
280	126	280	111	410	84
410	154	410	122	535	88
602	306	629	269	748	140
656	297	670	299	800	260
800	259	735	288	820	276
1010	240	800	268	910	257
1215	234	910	245	1215	242
—	—	1215	237	—	—

La prima colonna contiene l'intensità del campo magnetico in unità assolute misurato, come sempre, a 15 mm. dalla faccia polare del rocchetto; la seconda colonna dà le deviazioni galvanometriche mentre la sonda 1 della fig. 1 comunicava col galvanometro. Come si vede al crescere del campo la deviazione cresce sino ad un massimo, che si manifesta piuttosto bruscamente, e poi gradatamente di nuovo diminuisce. Tutto accade dunque come se entro il tubo esistesse un anodo, e questo fosse spinto di più in più verso sinistra, quando si aumenta l'intensità del campo. Ora tale appunto doveva essere il risultato, se l'anodo virtuale ha l'origine supposta, giacchè infatti gl' ioni positivi devono giungere tanto più lontani dal catodo, quanto più intenso è il campo magnetico.

La terza e quarta colonna danno gli analoghi risultati ottenuti impiegando la sonda 3; le ultime colonne quelli relativi alla sonda 8. Dal confronto dei numeri relativi alle tre sonde si scorge poi, che il massimo di deviazione si verifica per un valore del campo tanto più elevato, quanto più la sonda adoperata è lontana dal catodo; ciò che è in pieno accordo colle previsioni teoriche.

La tabella seguente dà alcuni dei risultati ottenuti col tubo della fig. 2, mentre la pressione dell'aria in esso era di 0,05 mm. e la corrente di scarica  $57.10^{-6}$  ampère tenendo costante l'intensità del campo magnetico e scandagliando colla sonda mobile l'asse dell'apparecchio.

	410	535	670	1375
150	232	216	213	180
300	224	212	—	—
400	210	—	—	183
450	37	202	213	—
500	20	—	210	186
550	0	21	100	—
600	0	—	12	191
650	0	4	5	—
700	0	0	—	197

La prima colonna verticale indica la distanza dal catodo alla quale la sonda venne successivamente posta; la prima linea orizzontale indica i valori del campo magnetico per ciascuna delle quattro serie di misure, i cui risultati (deviazioni in mm.) sono trascritti sotto. Si vede facilmente, che col campo di 410 unità la sonda mobile, che partendo da lontano veniva avvicinata al catodo, non cominciò a funzionare che quando fu a mezzo metro da questo, e che accostandola di più la deviazione crebbe rapidamente. Il supposto accumulo di ioni positivi cominciava dunque a manifestarsi a mezzo metro dal catodo, e mostravasi di più in più denso nelle regioni a questo più vicine.

Osservando le colonne successive si scorge poi chiaramente, come il supposto anodo virtuale si formi di più in più lontano dal catodo, quando si aumentà l'intensità del campo magnetico, al punto anzi che, con campo di 1375 unità si raccoglie una corrente più intensa quando la sonda è a 70 centimetri dal catodo che quando è più vicina. In quest'ultima circostanza si osserva il chiarore menzionato più sopra intorno al cannello circondante il filo della sonda; non si può quindi a rigore essere sicuri dell'attendibilità delle prime cifre dell'ultima colonna; ma resta nondimeno ben dimostrato il considerevole allontanamento dell'anodo virtuale dal catodo.

Le esperienze fatte col tubo fig. 2 sono dunque, non meno delle prime, favorevoli alla ipotesi da me proposta e sostenuta.



Zoologia. — *Ulteriori ricerche sui Fillosserini* (Nota 15<sup>a</sup>) <sup>(1)</sup>.  
Nota del Socio B. GRASSI.

Ho potuto tener dietro alle generazioni primaverili di quelle fillossere che altra volta avevo dubitativamente e con riserva riferite alle specie *Ph. acanthohermes* e *coccinea*; questo riferimento era stato fatto, seguendo specialmente la sinopsi e la revisione dei fillosserini italiani fatte dal Del Guercio.

Due anni fa io avevo cercato la *Ph. coccinea* del Del Guercio alla fine di maggio sulle pagine inferiori delle foglie, ma non l'avevo rinvenuta; l'anno scorso ripetendo le ricerche, trovai al principio della primavera una forma che mi parve ad essa ascrivibile, ma più tardi, per quante ricerche facessi, con mia meraviglia non fui più capace di rivederla.

Anche quest'anno, come l'anno scorso, ai primi di aprile essa riapparve sulle foglie appena spuntate e fece una generazione (generazione fondatrice) sulla loro pagina inferiore, producendo zooecidi caratterizzati da una piega quasi a forma di conchiglia bivalve più o meno chiusa, più o meno estesa di un lobo e anche di tutta una metà del lembo. Al riparo, sotto ogni piega, annidavasi di solito una fillossera sola, che deponeva un mucchietto di uova; nel punto dove succhiava, producevasi una macchia scolorita giallognola.

(<sup>1</sup>) Enumero per comodo del lettore le Note precedenti, apparse in questi Rendiconti, in parte mie ed in parte dei miei scolari Foà, Bonfigli, Grandori:

1. B. GRASSI e A. FOÀ. « Riassunto delle ricerche sulle fillossere e in particolare su quelle della vite ».
2. B. GRASSI e A. FOÀ. « Inaspettata scoperta di una fillossera sulle radici della quercia ».
3. A. FOÀ e R. GRANDORI. « Studi sulla fillossera della vite. Differenze tra la fillossera gallicola e la fillossera radicecola ».
4. B. GRASSI e A. FOÀ. « Ulteriori ricerche sulla fillossera gallicola della vite ».
5. B. GRASSI e R. GRANDORI. « Ulteriori ricerche sulle fillossere gallicole della vite ».
6. B. GRASSI e R. GRANDORI. « Ulteriori ricerche sulla fillossera gallicola della vite ».
7. B. BONFIGLI. « Ancora sul ciclo della *Phylloxera quercus* Boyer ».
8. A. FOÀ. « Intorno al ciclo evolutivo della fillossera del cerro ».
9. B. GRASSI e A. FOÀ. « Ulteriori ricerche sulla fillossera della vite ».
10. R. GRANDORI. « Ulteriori ricerche sulla fillossera della vite ».
11. B. GRASSI e A. FOÀ. « Sulla classificazione delle fillossere ».
12. B. BONFIGLI. « Ulteriori ricerche sulla *Phylloxera quercus* Boyer ».
13. B. GRASSI. « Studi sull'*Acanthohermes quercus* Kollar ».
14. A. FOÀ. « Intorno all'uovo durevole (uovo d'inverno) dell'*Acanthohermes quercus* Kollar ».

Le giovani larve, tutte rostrate, che si schiusero da queste uova, abbandonarono le foglie e si stabilirono sui ramoscelli anche di due anni di età, raccogliendosi in screpolature che casualmente vi si trovavano, oppure sotto ai periffilli (squamme e perule). Soltanto in casi molto rari le fillosere di questa generazione s'annidarono sotto la piega, in parte già necrosata, della generazione fondatrice. Nei varî posti qui indicati, per lo più riunite assieme a 2, 3 e fino a 8 e 10, diventarono mature (seconda generazione). La maggior parte fecero mucchietti di uova donde si svilupparono rostrati; un numero minore depose uova di sessuati; tutte restarono attere coi due occhi a tre lenti. Non mi fu dato incontrare nè ninfe nè alate. Il rostro delle neonate della seconda e della terza generazione (figlie e nipoti della fecondatrice) apparve più lungo che nella prima generazione. La quantità di uova fatte dalle singole madri virginopare della seconda generazione è stato molto minore che in quella precedente; anche la grandezza delle madri è apparsa minore. Le sessupare, non differenti da queste per le dimensioni, depositarono soltanto poche uova. Al presente è certamente in corso una terza generazione, derivata da madri virginopare, che non mi è possibile però tener distinta da quella precedente. Si trovano anche alcuni individui più grandi col rostro più corto, il cui significato mi riesce incerto.

La specie in discorso non è certamente la *coccinea* v. Heyden (che a mio avviso corrisponde invece alla *Ph. Foae* del Börner, ma di ciò più avanti).

Nelle madri fondatrici i tubercoli presentano molte anomalie. Nelle generazioni successive, essi vanno incontro quasi costantemente a notevolissime riduzioni di volume fino a scomparire quasi del tutto, tranne il pelo terminale. Per quanto ho finora veduto quelli delle serie marginali e pleurali del torace non rimangono mai piccoli, come li descrive nella *Ph. coccinea* il Börner.

A me sembra, tutto sommato, che la specie in discorso, che presenta tubercoli conici, sia una forma forse stata veduta, ma finora non distinta e vorrei denominarla *Ph. confusa* (Grassi).

Accenno ora sommariamente alla forma, che col Del Guercio riferivo alla *Ph. acanthohermes*, mentre invece non ha nulla che fare con essa. Questa forma per me finora non è distinguibile con sicurezza dalla *Ph. glabra* V. Heyden, nè dalla *Ph. coccinea* del Balbiani e del Dreyfus, nè dalla *Ph. punctata* del Buckton, del Dreyfus ecc. La prima generazione comparve contemporaneamente alla *Ph. confusa*, raramente producendo una piegatura della foglia, indistinguibile dalle più piccole prodotte da quest'ultima; per lo più faceva arricciare soltanto una piccola porzione periferica del lembo e, dentro all'arricciatura, fissandosi alla pagina inferiore della foglia, diventava matura. Essa faceva sempre le uova in un piano, disposte in archi di cerchio o cerchi più o meno incompleti, in numero maggiore di due. L'antenna lunga,



il rostro corto, i tubercoli appena accennati tranne quelli periferici, i tubercoli sormontati dai cerei cappucci nelle giovani larve ecc. permettono sempre di distinguere con facilità questa specie dalla precedente.

La seconda generazione si svolse alla pagina inferiore delle foglie, senza produrre mai nè arricciatura nè piega di sorta. La sua presenza era tradita soltanto da macchioline scolorite (bianco-giallognole).

In questa seconda generazione la madre virginopara resta più piccola, non è più a cuticola granulosa; questa presenta invece come una rete con nodi. Resta però sempre caratteristica la brevità del rostro in contrasto con la lunghezza delle antenne. Anche in questa specie le seconde madri (figlie della fondatrice) fanno un numero molto minore di uova, disposte in due soli cerchi incompleti. Non tutti gli individui di questa generazione diventano madri virginopare; per una parte non molto grande diventano invece madri attere sessupare, o cogli occhi formati soltanto dalle tre faccette, o cogli occhi come nelle ninfe; altri infine diventano ninfe rosse e poi alate. Queste forme alate presentano frequentissime variazioni del sensillo placoidale distale dell'antenna (lunghezza maggiore o minore, divisione in due o anche in tre sensilli, lontani l'uno dall'altro). *Esse, e ciò è veramente singolare, non arrivano mai a spiegare le ali in guisa da poter volare; restano sulla foglia su cui son nate e quivi fanno uova di sessuali.* I sessuali derivati da questa generazione scendono lungo i ramoscelli, ma ciò fanno anche in parte i neonati forniti di rostro.

La *Foaiella Danesi* non ha presentato ibernanti; ha perciò svernato soltanto l'uovo durevole. Un mese fa circa incontrammo sopra una radice un mucchietto di uova che dovevano essere state fatte da una madre fondatrice. Non ho potuto però procurarmi alcuna di queste; certamente è molto difficile di trovarle, però bisogna confessare che le ricerche fatte furono insufficienti. Oggigiorno abbiamo sulle radici delle querce abbastanza numerose madri virginopare; invece non ho ancora veduto nè ninfe nè sessupare. A un certo momento sospettai che la forma da me supposta *coccinea* (v. sopra) potesse far parte del ciclo della *Danesi*, senonchè i peli terminali e la lunghezza del terzo articolo delle antenne costituiscono dei caratteri distintivi. A togliere ogni dubbio poi basta confrontare il terzo articolo dell'antenna dei sessuali dell'una e dell'altra forma.

La *Ph. salicis* ha svernato pure soltanto come uovo fecondato. Sono già avvenute alcune generazioni tutte nella corteccia del salice. Mancano sempre le ninfe. Non trovo ancora sessupare.

La *M. corticalis* soltanto alla fine dell'inverno ha cessato di proliferare. Di essa sono sopravvissute giovani larve (ibernanti), non però in molta quantità.

La specie che noi avevamo dubitativamente riferito alla *Ph. punctata* Lichtenstein, basandoci sui riscontri coi dati insufficienti che si trovano nella

letteratura francese intorno a questa specie (soprattutto sul fatto che in mezzo a molte centinaia di sessupare attere, non avevamo incontrata alcuna alata), è stata da noi seguita quest'anno per due generazioni (prima e seconda). Ora è cominciata la terza; si trovano, cioè, giovani larve, nipoti delle fondatrici. Nelle prime due generazioni ho trovato soltanto madri virginopare. Questa specie ha veramente molta somiglianza con quella che il Börner ha denominata *Ph. Foaë*, però la lunghezza delle antenne non corrisponde. Attendo le ninfe e le alate, se verranno, per dare un giudizio definitivo. Fin d'ora noto che la descrizione data dall'Heyden della sua *Ph. coccinea* coincide meglio colla *Ph. Foaë*, che colla *Ph. coccinea* del Börner (<sup>1</sup>).

In complesso, questa specie viene biologicamente caratterizzata come segue:

1.° la fondatrice, la quale può trovarsi anche alla pagina superiore della foglia, arriccia l'orlo di questa;

2.° le figlie della fondatrice, che stanno sempre alla pagina inferiore della foglia, non producono arricciamento di sorta, ma semplici macchioline scolorite bianco-giallognole, qua e là nel lembo;

3.° la madre deposita uova isolate, sparse qua e là alla pagina inferiore del lembo.

Debbo aggiungere che non si trovano spiccate differenze morfologiche tra le madri virginopare della prima e della seconda generazione.

Sulle querce propriamente dette (gruppo *Robur*), si trovano perciò nell'Italia media le seguenti forme:

*Acanthohermes quercus* Kollar.

*Phylloxera glabra* von Heyden (?) (Sin. *Ph. acanthohermes* p. p. Del Guercio).

*Phylloxera confusa* Grassi.

*Foaiella Danesi* Grassi e Foà.

*Phylloxera coccinea* von Heyden? (non Börner) (nostra supposta *Ph. punctata*).

*Phylloxera quercus*, proveniente dalle alate virginopare del leccio o delle uova d'inverno deposte sulla quercia (Bonfigli).

La *Ph. coccinea* von Heyden, ha grande somiglianza colla *Ph. quercus* e noi tenteremo perciò di acclimatarla anche sui lecci.

Riguardo alle distinzioni in generi delle forme da me illustrate nella presente Nota, io resto molto incerto. I caratteri distintivi della *confusa*, della *glabra* (?) e della *coccinea* (?), mi sembrano più che sufficienti per

(<sup>1</sup>) Kopf, Halsschild und Hinterleib reihenweise mit kleinen weissen nagelförmigen Knöpfchen besetzt, deren Knöpfchen etwas höckerig sind (von Heyden).

ripartirle in tre generi. Così facendo, la famiglia dei Fillosserini verrebbe però ad essere divisa in generi, tutti o quasi tutti con una sola specie: ma io ritengo che approfondendo lo studio dei caratteri minori di queste forme nelle varie località, ognuna di esse verrà a subire un'ulteriore scissione in specie.

Fisica. — *Sulle scariche oscillatorie*. Memoria del Socio A. BATTELLI e L. MAGRI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Storia delle matematiche. — *Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche*. Nota di F. AMODEO, presentata dal Corrispondente E. PASCAL.

Pareva finora che in quell'epoca gloriosa del 1640, in cui la Francia segnava uno dei periodi più memorabili della geometria sintetica, colle opere di Desargues <sup>(1)</sup> e di Pascal, l'Italia fosse rimasta inerte e noncurante di tanto slancio geometrico ed avesse rivolta la sua attenzione soltanto alle scienze sperimentali ed all'astronomia, all'idraulica, al calcolo integrale, alla meccanica applicata, al meccanismo del corpo degli animali ed alla restituzione delle più antiche opere classiche geometriche con Galilei, Castelli, Torricelli, Cavalieri, Borelli e Viviani.

Invece non è così, e qui ci proponiamo di far vedere che in quella stessa epoca in cui la Francia segnava l'inizio della moderna geometria sintetica, l'Italia ne segnava, per così dire, il completamento mediante l'ingegno portentoso del padre gesuato, milanese, Bonaventura Cavalieri, il quale aveva il gusto di cercare, non le grandi cose, ma le piccole e minute cose, che dovevano generare le grandi. Egli si era occupato di geometria delle coniche, fin da quando fu a Pisa iniziato dal Castelli agli studi delle matematiche, scrivendo lo *Specchio ustorio*; ma in questo egli si era contentato di dimostrare le costruzioni per moto continuo ideate dal Keplero per la parabola e l'iperbole conforme a quella già nota dell'ellisse dichiarandosi contento di averlo fatto per il primo; avea cercato di dimostrare la possibile effettuazione della *linea ustorio* ideata dal napoletano Giov. Batt. della Porta, avea annunziato delle trasformazioni non proiettive di ellissi in parabole, di parabole in iperbole e di iperbole in altre iperbole, ed era passato

(<sup>1</sup>) Cfr. Amodeo, *Nuova analisi del trattato delle coniche di Gérard Desargues e cenno su J. B. Chauveau*. Rend. Acc. Sc. Napoli, 1906.



oltre, cercando di evitare con cura di esser accusato di plagio. Non è però in questo primo saggio che il suo acume geometrico avea giganteggiato. Esso si manifesta quando Cavalieri meno lo avrebbe sospettato, quando egli tratta di applicare i suoi indivisibili alla quadratura della *spirale* di Archimede. Qui con una genialità abbagliante, per dimostrare che l'area racchiusa fra il primo giro della spirale e l'asse è  $\frac{1}{3}$  del cerchio che lo contiene, tenendo fissi gli *argomenti* dei diversi punti della curva nella loro origine sull'asse, egli li rettifica perpendicolarmente all'asse e mostra che gli estremi di questi argomenti si trovano su una parabola e che quindi la spirale si è trasformata in una parabola. Deduce da ciò il teorema dell'area, e subito dopo egli perviene, con la sua sagacia, a ritrovare in questa trasformazione una costruzione della parabola, che comincia a spezzare il cerchio di ferro entro cui il metodo degli antichi aveva chiuso le sezioni coniche, poichè alle costruzioni fatte col compasso, le sole che per 20 secoli si erano sapute usare, sostituisce una costruzione fatta soltanto con linee rette <sup>(1)</sup>.

Questa costruzione è pubblicata nello Scolio 2 della Prop. 9 del Libro sesto della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quodam ratione promota*, da lui stampata nel 1635; ma è dimostrato che fin dal 1623 (19 aprile) egli aveva mandato al Galileo il manoscritto che conteneva questa sua ricerca sulla spirale, che nel 1625 l'aveva comunicato a Cesare Marsili, che nel 1627 tutta l'opera era stata mandata a mons. Ciampoli a Roma per darla alla stampa e che nel 27/2 1629 fu rimandata al Marsili come titolo per poter succedere al Magini nella cattedra di Bologna <sup>(2)</sup>. Cosicchè la priorità di questa costruzione su quelle che Mydorge pubblicava nel suo trattato delle sezioni coniche <sup>(3)</sup>, anche nel caso che esse siano contenute nella prima edizione del 1631 di questo trattato, rimane fuori di ogni discussione.

All'epoca in cui Cavalieri pubblicava la sua *Geometria indivisibilibus*, egli non era riuscito a fare un passo egualmente ardimentoso per le due altre sezioni coniche, quantunque egli, convinto della grande importanza di ottenere un'analogia costruzione per le altre due curve, ci pensasse a lungo. Ed il suo cervello era tale che non poteva non riuscire, e quando finalmente raggiunse la desiderata costruzione egli confessò che questa scoperta gli dette un vivo piacere e la comunicò al Torricelli e a Gian Antonio Rocca, i quali, come egli stesso afferma, la modificarono subito in altra più elegante. Il

<sup>(1)</sup> Cfr. Amodeo, *I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson*. Atti Ist. tecn. di Napoli, 1905, pp. 19-69.

<sup>(2)</sup> Cfr. Favaro, *Bonaventura Cavalieri e la quadratura della spirale*. Rend. Ist. Lombardo, 1905.

<sup>(3)</sup> *Claudii Mydorgii patricii parisini conicorum*, stampato in due libri nel 1631, ed in quattro libri nel 1639. A me è riuscito di consultare soltanto la seconda edizione del 1639.

Cavalieri ha consegnato ai posteri questa costruzione nella sesta delle sue *Exercitationes geometricae sex* <sup>(1)</sup> (1647) con queste precise parole:

“ Dum meae Geometriae Ind. Librum Sextum contexerem inudi in mo-  
“ dum describendae parabolae satis facilem, quam in eo Libro Scolio 2  
“ Prop. 9 studiosis postmodum communicavi. Diù dolui non posse pariter  
“ hyperbolam, & ellipsim tam facili ratione describi. At deniq; animadverti  
“ idem in ijs quoq; perfici posse, quod mihi non parum attulit voluptatis.  
“ Hunc ergo modum hic palam faciendum ad publicam utilitatem duxi,  
“ quod praemissa sequenti Lemmatica Propositione nunc praestabo ” (cfr. l. c.,  
pag. 445).

Ed alla fine (a pag. 451) dice:

“ Cum superiorē praxim ex me quoque intellexissent Torricellius &  
“ Roccha eiusdem ipsi quoque diversam à superiori elegantemque rationem  
“ attulerint ”.

Eppure una così interessante scoperta, tanto apertamente annunciata, ha potuto rimanere trascurata, e Bonaventura Cavalieri, la cui fama come inventore e creatore del calcolo integrale, non è stata mai messa in dubbio, ma soltanto annebbiata dalla penosa difficoltà che s'incontra a leggere ed intendere l'opera sua sugli indivisibili, non è mai stato reputato degno, come geometra delle coniche, di stare in rango con Desargues e Pascal, mentre si potrebbe financo considerarlo come il precursore di Steiner.

Come ciò possa essere avvenuto si può spiegare nel seguente modo:

Il grande storico della geometria Michel Chasles, che tutti meritamente onorano per l'incremento che seppe dare al progresso della geometria con le sue ricerche storiche, e le applicazioni che ne seppe fare, e pel quale con fine senso di giustizia la Francia creava una cattedra di geometria superiore, non ebbe opportunità d'intuire a fondo tutta l'importanza del contributo che Cavalieri dava alla geometria delle coniche; poichè egli parlando di Cavalieri ha poco misurate le parole nel confronto del vero merito di lui. Egli non dedica nella sua famosa *Aperçu historique* che un paragrafo di poche righe, 10 in tutto, al nostro grande italiano; riconosce che la geometria degli indivisibili venne ad arricchire la scienza e segnare l'epoca dei grandi progressi fatti nei tempi moderni, ma aggiunge, allontanandosi molto dal vero: “ Questo metodo adatto alla determinazione delle aree, dei volumi,  
“ dei centri di gravità dei corpi e che ha supplito per 50 anni con van-  
“ taggio al calcolo integrale, non era come l'ha fatto vedere Cavalieri stesso,  
“ che un'applicazione felice o piuttosto una trasformazione del metodo di  
“ esaustione ” <sup>(2)</sup>. Qui, se Chasles ha ragione sulla affinità che egli trova

<sup>(1)</sup> La *sesta esercitazione* è una miscellanea di questioni diverse. La prima è dedicata alla costruzione che qui citiamo ed è intitolata: *De modo facili describendi Sectiones Conicas, et in omnibus uniformi*, ed occupa da pag. 445 a pag. 451.

<sup>(2)</sup> Cfr. Chasles, *Aperçu historique*, pag. 57 della seconda ediz.

tra il metodo di Cavalieri e quello di Archimede, ragione che gli si può concedere maggiormente ora che la moderna scoperta della *Metodologia* di Archimede ha fatto conoscere il metodo di ricerca del grande siracusano <sup>(1)</sup>, non ha però ragione nel dire che il metodo di Cavalieri suppliva per 50 anni il calcolo integrale. Il metodo di Cavalieri invece creava e poneva le basi solidissime del calcolo integrale, ed indipendentemente dal calcolo differenziale, e ciò 50 anni prima che al calcolo differenziale si fosse pensato: ed esso è tale che si potrebbe far rivivere tal quale per adottarlo nell'insegnamento di quelle scuole ove non è possibile insegnare il calcolo differenziale, come sono per esempio le scuole professionali medie.

Un'altra sola volta lo Chasles parla espressamente di Cavalieri, a pag. 100 <sup>(2)</sup>, in occasione del matematico Jean de Witt. Egli vanta il metodo di De Witt per aver ideata la descrizione delle coniche per intersezioni di rette che generalmente erano i lati di angoli mobili, ed aggiunge: « Fin  
« allora non vi era stata che la parabola che si fosse descritta in tal modo.  
« L'iperbole e l'ellisse ricavavano la loro generazione dal cerchio direttamente,  
« o avevano bisogno nelle diverse costruzioni dell'impiego di questa curva.  
« Intanto dobbiamo dire che Cavalieri aveva già avuta l'idea di cercare per  
« l'ellisse e per l'iperbole una descrizione con la linea retta, analoga a quella  
« della parabola, e le sue ricerche avevano avuto un primo successo che  
« questo geometra confessava avergli cagionato un vivo piacere. Ecco il principio del suo metodo, che noi presentiamo con un enunciato più generale,  
« che lo farà meglio concepire: che si abbia un angolo e che si menino  
« delle trasversali parallele fra loro: che dai punti ove ciascuna trasversale  
« incontra i due lati dell'angolo, si menino due rette concorrenti rispettivamente a due punti fissi, queste due rette si taglieranno in un punto che  
« avrà per luogo geometrico una conica passante per i due punti fissi ».

E fin qui lo Chasles è stato di una fine percezione e chiaroveggenza, e non doveva che dedurne la conseguenza per assurgere alle conclusioni a cui avrebbe dovuto pervenire.

Invece egli continua così:

« Ce n'est pas ce théorème général que Cavalieri démontre, mais seulement l'un de ses cas particuliers; il suppose l'angle droit, les deux points fixes placés sur les côtés, et la direction des transversales telles que ces deux points soient les sommets de la courbe ». Qui Chasles ha equivocato sulla posizione dei punti, che non sono sui lati dell'angolo retto e non ha dato un'idea chiara dell'estensione del teorema di Cavalieri. E se l'equivoco può essere benevolmente considerato come un errore di trascrizione, non si

<sup>(1)</sup> Cfr. Zeuthen, *Quelques traits de la propagation de la Science de génération en génération*, Rivista di Scienza (« Scientia »), 1909, n. 9, pag. 1.

<sup>(2)</sup> Cfr. l. c., 2<sup>a</sup> ediz.



può con eguale benevolenza scusare l'accenno inadeguato del teorema; poichè dopo che egli ha detto: « Ainsi la pensée qui a dirigé de Witt, dans ses « descriptions des coniques par la ligne droite, n'était pas absolument nouvelle »; aggiunge questa grave e non esatta considerazione: « mais Cavalieri s'étant borné à un seul théorème, l'un des plus restreints de cette « théorie, qui est extrêmement féconde, l'ouvrage de De Witt présente réelement un caractère de nouveauté qui mérite d'être remarqué dans l'histoire de la Géométrie ».

Non ci voleva più di tanto per impedire che si riconoscesse il merito della costruzione della coniche ideata da Cavalieri: dopo un giudizio così autorevole più nessuno poteva pensare a rivedere la costruzione di Cavalieri, come infatti è avvenuto, ed invano se ne cercherebbe un accenno nemmeno nelle magistrali opere di Cantor e Zeuthen (<sup>1</sup>).

Così la svista di un solo, quando questi è una persona autorevole, può tramandare per molto tempo un errore storico. E ciò non si potrà evitare fino a quando l'*Archivio delle Matematiche*, che io ebbi l'onore di proporre al Congresso internazionale dei Matematici a Roma, nell'aprile del 1908, non sarà un fatto compiuto. Ma in quanto riguarda il Cavalieri è tempo ora che egli sia, anche come promotore della moderna geometria proiettiva, messo nella sua vera luce, che non è meno risplendente di quella che, per una strana coincidenza di fatalità, anche con ritardo, fu riconosciuta a Desargues e a Pascal.

Vediamo dunque qual'era la costruzione di Cavalieri riguardante la parabola.

Se A è il vertice (vedi figura 2<sup>a</sup> a pag. 666), AC l'asse, AG la tangente al vertice ed E un punto qualunque della curva, egli completa il parallelogramma ACEG, e segna sulle rette GE, CE due punteggiate simili, che abbiano per punti corrispondenti G, C ed E per punto unito, proietta la prima da A, la seconda del punto all'infinito della curva ed ha nei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti dei due fasci proiettivi la curva voluta.

Questa costruzione fu elegantemente estesa da Torricelli (<sup>2</sup>) per applicarla alla descrizione della traiettoria di un proiettile, cioè al caso di una parabola di cui sian dati un punto e la tangente in esso, un altro punto e la direzione dei suoi diametri. Supposto A (vedi fig. 1<sup>a</sup>, pag. 166) il punto di contatto della tangente AG, ed E un punto qualunque della curva, GE la direzione dei diametri, egli considera le punteggiate simili sulle rette GE, AE, che hanno per punti corrispondenti A, G e per punto unito E, proietta la

(<sup>1</sup>) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig; G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik in XVI und XVII Jahrhundert*, Leipzig, 1903.

(<sup>2</sup>) Il Torricelli comunicava questa costruzione al Magiotti in Roma in data 8/1 1640 (cfr. Ghinassi, *Lettere e vita di Torricelli*, Firenze, 1864) e la inseriva a pag. 221 dell'opera pubblicata il 1644, nel trattato *De Motu gravium...*

prima da A, e la seconda dal punto all'infinito della retta GE ed ottiene la curva per intersezione dei raggi corrispondenti dei due fasci proiettivi.

Questa costruzione della parabola per fasci proiettivi era la prima che si fosse ideata, ma i precedenti citati, avendo messo anche me su falsa strada, me l'aveva fatta attribuire a Mydorge (<sup>1</sup>). Questi ha il merito invece di avere trovate, dopo del Cavalieri, altre tre costruzioni della parabola per fasci proiettivi, tutte sullo stesso tipo (<sup>2</sup>), cioè sempre mediante l'intersezione dei raggi corrispondenti di due fasci che proiettano due punteggiate simili,

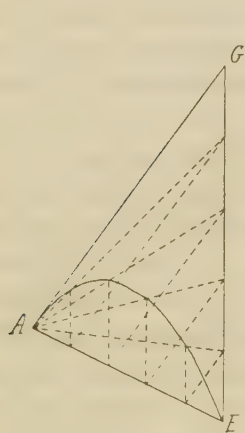


FIG. 1.

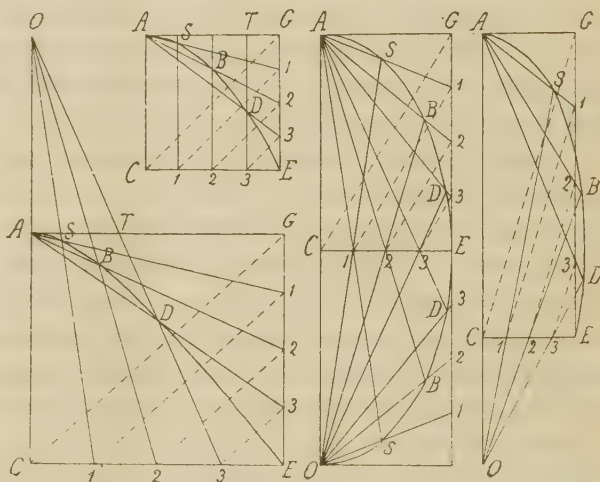


FIG. 2.

una da un punto proprio, l'altra dal punto all'infinito della parabola: delle quali la terza coincide completamente con quella di Torricelli, senza però fare accenno alla esistenza della tangente in A.

La costruzione lineare della parabola era dunque assodata e restava a trovare quella delle altre due coniche. Il merito di aver costruito linearmente l'ellisse e l'iperbole era stato attribuito da me (<sup>3</sup>) come dal Dingeldey (<sup>4</sup>) a l'Hospital, perchè si trova la detta costruzione nell'opera di lui pubblicata dopo la sua morte, nel 1707, col titolo: *Traité analytique des Sections coniques*. In quest'opera l'Hospital prima (a pag. 100) inserisce una costruzione delle tre coniche sul tipo di quella di De Witt, ottenuta facendo rotare un angolo retto intorno a un vertice della conica, e trovando l'intersezione di un lato di esso con la retta che dall'altro vertice della conica proietta il punto d'intersezione dell'altro lato dell'angolo con una retta

(<sup>1</sup>) Cfr. Amodeo, *I trattati...* l. c., pag. 26 dell'estratto.

(<sup>2</sup>) Cfr. Mydorge, l. c., libro II, pag. 28 e segg.

(<sup>3</sup>) Cfr. Amodeo, *I trattati...* l. c., pag. 43 dell'estratto.

(<sup>4</sup>) F. Dingeldey, *Encyclopädie d. Mathem. Wiss.*, Bd. III, C. 1, pag. 13.

assegnata perpendicolarmente all'asse che passa per i due vertici indicati; e poi (a pag. 103) mostra che proiettando da un estremo di un asse la punteggiata esistente sulla tangente nell'altro estremo di esso, e da questo estremo la punteggiata ad essa eguale opportunamente posta su una parallela all'asse situata ad una determinata distanza si hanno nelle intersezioni dei raggi corrispondenti i punti della conica.

Ma adesso resta assodato che il merito di aver fatto questo passo arduo, che sopprimeva la difficoltà di ricorrere al compasso per costruire le coniche a centro, è esclusivamente del nostro grande Cavalieri, e ciò non più tardi del 1641 <sup>(1)</sup>, e con un metodo più generale di quello escogitato dallo stesso Hospital tanto tempo dopo, e valevole per tutte le coniche.

Per esporre la costruzione di Cavalieri riprodurremo qui la sua stessa figura (fig. 2<sup>a</sup> della pag. 166) aggiungendovi soltanto le linee tratteggiate CG, 11, 22, 33, di cui egli si è servito per la dimostrazione della regola in altra figura. Egli dice:

Se si vuol costruire una conica a centro di cui siano dati gli estremi di un diametro AO ed un punto E, e la direzione del diametro coniugato ad AO, si tirino per E la retta EG parallela al diametro AO e la retta EC parallela al diametro coniugato ad esso, e si completi il parallelogramma ACEG; indi con rette parallele alla diagonale CG si determinino sulle rette CE, GE le due punteggiate simili 123 E, 123 E e si proietti la prima da O, la seconda da A; si avranno nei punti d'intersezione S, B, D dei raggi corrispondenti dei fasci (A) ed (O) i punti della curva.

La figura del Cavalieri potrebbe far ritenere che egli volesse limitare la sua costruzione alla conica data dall'asse e da un punto, ma tanto il ragionamento fatto, quanto la dimostrazione, non ammettono queste restrizioni, ed anzi l'ultimo disegno a destra mostra che Cavalieri si è preoccupato di far notare che la sua costruzione non era limitata solo al caso che il punto E fosse un vertice della conica, ma che poteva essere un qualunque suo punto. Nè le costruzioni di De Witt sono da ritenersi più vantaggiose di quelle di Cavalieri, perchè il De Witt ottiene le diverse coniche con costruzioni differenti dipendenti o dalla rotazione di un angolo costante intorno al vertice o dallo strisciamento di un angolo costante con un lato su una retta, o dalla traslazione rettilinea di un segmento costante, e le costruzioni, che sono diverse per la parabola e per l'iperbole e non sono nemmeno estese all'ellisse, risultano tali che la generazione proiettiva delle coniche non risulta evidente ed immediata come in Cavalieri. Dippiù il Cavalieri dimostra la sua costruzione in modo che si può enunciare il teorema:

<sup>(1)</sup> Questa costruzione dell'ellisse e dell'iperbole fu comunicata da Cavalieri a G. Antonio Rocca nei primi mesi del 1641 (cfr. Favaro, *Gian Antonio Rocca*. Ann. Istituto Veneto, 1906).

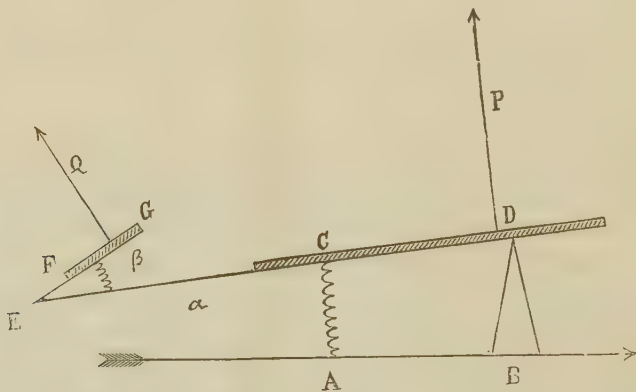


→ Proiettando i punti della conica da O e da A si ottengono due fasci che determinano sulle rette GE, CE due punteggiate simili; e si può ora aggiungere, quindi sono proiettivi; sicchè pare addirittura, nel leggere quella esercitazione di essere trasportati ai tempi di Steiner, cioè quasi due secoli dopo.

Anzi se si aggiunge che Desargues aveva ricavata la sua teoria dei poli e polari rispetto alle coniche, dalla proiezione delle figure che riguardavano la teoria di *centro e diametri*, mostrando che le proprietà proiettive che si enunciano per gli estremi di un diametro reggono per qualunque coppia di punti di una conica, bisogna convenire che la teoria della generazione proiettiva delle coniche, che soltanto coll'opera di Steiner <sup>(1)</sup> prese così generale sviluppo, era già virtualmente compresa nella costruzione di Cavalieri.

**Meccanica applicata.** — *Modo d'intensificare gli effetti dell'attacco elastico in un aeroplano.* Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrispondente V. REINA.

In due recenti lavori <sup>(2)</sup> ho trattato di un'idea del capitano Crocco, la quale oggi ritorna, dopo lungo silenzio, in onore, ed è applicata con successo da costruttori stranieri, che (probabilmente per equivoco) la considerano come propria.



Non credo cosa inutile nè inopportuna far vedere come quell'idea possa acquistare estensione; e descriverò pertanto un apparecchio, che può presentarsi come un buon accessorio nella costruzione di alcuni tipi d'aeroplani.

L'asse AB è rigidamente collegato coll'asse dell'aeroplano; l'asse dell'aeroplano si suppone sulla direzione del movimento, il quale avviene con

<sup>(1)</sup> Steiner, *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten...*, Berlin, 1832, pag. 139.

<sup>(2)</sup> *Sopra un brevetto...*, ecc.; *Effetto dell'attacco elastico...*, ecc. Questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5<sup>a</sup>, 1° sem., fasc. 9 e 10.

velocità orizzontale di regime  $v_0$ . Un piano portante CD, imperniato in D, è trattenuto da una molla AC. Il punto D è invariabilmente collegato coll'asse AB, e, rispetto al piano portante CD, la sua posizione è scelta con uno speciale criterio; si sa che il centro di pressione di un piano, il quale si muova obliquamente nell'aria, è spostato verso il movimento: noi metteremo D nella più avanzata fra le posizioni che possano essere occupate dal centro di pressione durante il movimento <sup>(1)</sup>. Se l'aeroplano si muove dunque secondo AB, e l'ala CD fa un piccolo angolo positivo  $\alpha$  con tale direzione, allora l'azione della pressione P fa un piccolo contrasto coll'azione della molla. Un contrasto notevole è invece dato dalla pressione Q, la quale si esercita contro l'aletta ausiliare FG, perchè il braccio di leva, che chiameremo L, si suppone notevolmente lungo (poco più corto di ED). L'aletta ausiliare FG è imperniata in E, ed è anteriormente trattenuta da una piccola molla che elasticamente cede agli aumenti della pressione Q <sup>(2)</sup>; con  $\beta$  indichiamo l'angolo di FG con CD.

Se ora con  $\alpha_0$  e  $\beta_0$  intendiamo esprimere i valori di  $\alpha$  e di  $\beta$  corrispondenti alla velocità orizzontale di regime  $v_0$ ; se con  $Q_0$  indichiamo la pressione che per effetto di questa velocità si sviluppa contro l'aletta FG, e con  $T_0$  il corrispondente valore della tensione T, che la molla esercita tirando C verso il basso, allora noi potremo subito scrivere alcune formule utili.

Uguagliando i momenti di Q e di  $-T$  rispetto a D <sup>(3)</sup>, ed osservando che, senza pratici errori, tanto Q quanto T hanno direzioni normali alla direzione CD, noi otteniamo

$$(1) \quad (Q - Q_0) L + (T - T_0) \lambda = 0.$$

In questa formula è rappresentato con L il braccio di Q, quasi uguale a ED, ed è rappresentata con  $\lambda$  la lunghezza CD.

Supponendo ora gli incrementi  $T - T_0$  proporzionali, secondo la costante  $-\mu$ , agli allungamenti  $l - l_0$  della molla AC, possiamo scrivere

$$T - T_0 = -\mu(l - l_0).$$

<sup>(1)</sup> In marina, ed anche recentemente in aeronautica, si adoperano i cosiddetti *timoni compensati*. Il modo d'imperniarli si fonda su questo principio (v. per es. Pollard et Dubeout, *Théorie du navire*, 1894, t. IV, § 320).

<sup>(2)</sup> Questo principio, contenuto teoricamente in quello del doppio attacco elastico, è adoperato in un recente brevetto Crocco-Ricaldoni.

<sup>(3)</sup> Il centro della pressione principale P non è in D, sebbene sia molto vicino. Se  $\varphi$  denota l'angolo di AB colla traiettoria, e se  $\alpha + \varphi$  è positivo, allora gl'incrementi di  $\alpha$  sposteranno indietro il centro di pressione, e toglieranno un po' di valore al richiamo esercitato dalla molla: avverrà come se la molla fosse un po' più cedevole. Per  $\alpha + \varphi$  negativo avverrà l'opposto: P cospirerà colla tensione della molla. I decrementi di  $\alpha$ , che noi calcoliamo trascurando lo spostamento del centro di pressione, sono dunque leggermente inferiori al vero finchè  $\alpha + \varphi$  è positivo, e leggermente superiori al vero quando  $\alpha + \varphi$  è negativo.

Ciò vale, si capisce, entro opportuni limiti. Ma  $l - l_0$  si può assimilare a un arco di circolo di raggio  $\lambda$  corrispondente all'angolo al centro  $\alpha_0 - \alpha$ ; dunque scriveremo

$$(2) \quad T - T_0 = \mu \lambda (\alpha - \alpha_0).$$

In modo perfettamente analogo (v. la mia prima Nota già citata), noi possiamo stabilire

$$(3) \quad Q - Q_0 = c (\beta - \beta_0),$$

indicando con  $c$  una costante *positiva*.

Aggiungeremo ancora la formula canonica

$$(4) \quad Q = kv^2 (\alpha + \beta + \varphi),$$

che inizialmente si riduce a  $Q_0 = kv_0^2 (\alpha_0 + \beta_0)$ , perchè l'angolo di incidenza  $\varphi$ , che AB fa colla direzione del movimento, si suppone nullo nel moto di regime.

Questi concetti finora esposti ci lasciano subito vedere come il dispositivo ora descritto intensifichi l'effetto del dispositivo Crocco <sup>(1)</sup>. Dalle formule (1), (2), (4) si ricava

$$kL[v^2(\alpha + \beta + \varphi) - v_0^2(\alpha_0 + \beta_0)] + \mu\lambda^2(\alpha - \alpha_0) = 0$$

e poi

$$(5) \quad \alpha = \frac{kLv_0^2(\alpha_0 + \beta_0) + \mu\lambda^2\alpha_0 - kL(\beta + \varphi)v^2}{\mu\lambda^2 + kLv^2},$$

Se supponessimo  $\beta$  invariabilmente nullo, noi ricadremmo (a parte l'interruzione fra l'ala CD e l'aletta FG) nell'idea dell'ordinario attacco elastico. La (5), nella quale si faccia  $\beta = 0$ , mostra che per  $v$  infinito l'angolo  $\alpha$  tende a  $-\varphi$ , ed è chiaro che tende decrescendo a tale valore. Se invece esiste un  $\beta > 0$ , allora, per  $v = \infty$ , l'angolo  $\alpha$  tende a  $-\varphi$  diminuito ancora del valore al quale tende  $\beta$ . Perciò la pressione sostentatrice principale  $P = Kv^2(\alpha + \varphi)$  si può, per forti valori di  $v$ , ritenere non soltanto *ridotta*, come sarebbe per  $\beta$  costantemente nullo, ma anche *invertita di senso*. Osserviamo che se  $\beta$  si suppone positivo, ma costante, il che equivale ad abolire l'elasticità d'attacco dell'aletta FG, sostituendovi un attacco rigido, allora la formula (5) lascia dedurre un valore limite di  $\alpha$  uguale a  $-\varphi - \beta_0$ .

<sup>(1)</sup> Un modo meno semplice per ottenere tale risultato è esposto in un recente brevetto Crocco.



L'attacco elastico concede invece a  $\beta$  di aumentare notevolmente <sup>(1)</sup>, anche se partiamo, per esempio da un valore iniziale  $\beta_0 = 0$ .

Dopo queste premesse, non sarà male esprimere effettivamente  $\alpha$  in funzione di  $v$ , dell'angolo d'incidenza  $\varphi$ , e degli elementi costruttivi, eliminando  $\beta$ .

La (1), la (2) e la (3) conducono a scrivere

$$Lc(\beta - \beta_0) + \mu\lambda^2(\alpha - \alpha_0) = 0.$$

Da (3), (4) si ricava invece

$$c(\beta - \beta_0) = k[v^2(\alpha + \beta + \varphi) - v_0^2(\alpha_0 + \beta_0)].$$

L'eliminazione di  $\beta$  lascia ricavare  $\alpha$  in funzione di  $v$ , di  $\varphi$ , e degli elementi costruttivi. Risulta

$$(6) \quad \alpha = \frac{\left(\mu\lambda^2 - \frac{k\mu\lambda^2}{c}v^2 + Lkv_0^2\right)\alpha_0 - Lk(v^2 - v_0^2)\beta_0 - Lkv^2\varphi}{\mu\lambda^2 - \frac{k\mu\lambda^2}{c}v^2 + Lkv^2}.$$

L'elemento costruttivo  $L - \frac{\mu\lambda^2}{c}$  non deve mai essere negativo.

Osserviamo che, per  $v = v_0$ ,  $\varphi = 0$ , risulta, come è naturale,  $\alpha = \alpha_0$ . Col crescere di  $v$ ,  $\alpha$  decresce. Per  $v = \infty$ ,  $\alpha$  tende al limite

$$-\frac{\frac{\mu\lambda^2}{c}\alpha_0 + L(\beta_0 + \varphi)}{L - \frac{\mu\lambda^2}{c}}.$$

<sup>(1)</sup> Non bisogna dimenticarsi che le relazioni sulle quali fondiamo il nostro studio valgono per angoli piccoli, tali cioè che il coseno sia praticamente sostituibile con 1, il seno col valore dell'arco, ecc. Se la molla che trattiene FG dovesse in qualche applicazione pratica risultare tanto debole da consentire angoli  $\beta$  forti, allora bisognerebbe passare da questo a quell'ordine di idee, e tener conto di elementi che qui trascuriamo. La pratica ha qualche volta procedimenti che parrebbero paradossali se la teoria non li spiegasse. È più pratico, per esempio, parlare qui di  $v$  infinito che di  $\beta = \frac{\pi}{4}$ . Così, per esempio, se nell'ultima formula approssimata

$$\frac{N}{M} = \frac{6U(G-1) + 3P_0}{P_0G^2},$$

del secondo fra i miei due citati lavori, noi ponessimo  $G = 1$ , noi faremmo un errore molto grossolano, perchè tale formula, che è vicinissima al vero per i valori costruttivi di  $G$  che ivi più c'importano, è addirittura falsa nelle vicinanze di  $G = 1$ ; essa è poi invece *rigorosamente vera* per la condizione irrealizzabile  $G$  *infinito*.

Se  $c$  si suppone infinito (collegamento rigido di FG), ritroviamo  $-\varphi - \beta_0$ , come abbiamo dianzi osservato. Se  $c$  si suppone nullo, risulta  $\alpha = \alpha_0$ , perchè gl'incrementi di  $v$  e di  $\varphi$  non troveranno resistenza nell'aletta FG, della quale trascuriamo il peso. Se  $c$  fosse non nullo ma vicino a zero, allora la formula non darebbe una buona idea del fenomeno, perchè piccole variazioni di  $Q$  darebbero angoli  $\beta$ , *efficaci*, molto discosti da zero. Siamo nel caso di una formula, buona per  $c=0$ , poco buona per  $c$  vicino a zero, e buona peraltro per i valori pratici di  $c$ , i quali sono abbastanza discosti da zero.

Se si volesse semplificare la (6), bisognerebbe contentarsi di un'approssimazione ancora minore; ed aumenterebbe la necessità di fare attenzione nell'applicarla.

**Meccanica.** — *Sulle equazioni generali della dinamica.* Nota di P. BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Costituzione dell'arco voltaico* <sup>(1)</sup>. Nota di A. OCCHIALINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

1. Il problema della costituzione dell'arco voltaico è ancora argomento di controversia e di discussione. Tutti sono d'accordo nel riconoscere una somiglianza fra il processo che si svolge nell'arco, e quello che ha per sede altre forme di passaggio di elettricità nei gas, scintilla e scarica nei gas rarefatti; secondo il Villard <sup>(2)</sup> anzi, l'arco non sarebbe che una scarica ridotta alla luce positiva. Però tutto questo, se stabilisce importanti relazioni fra i diversi ordini di fenomeni, non porta nessun contributo alla loro conoscenza. E così, mentre molti ritengono che i fenomeni della scarica nei gas in generale e particolarmente l'arco voltaico siano dovuti al movimento di ioni positivi e negativi in sensi opposti, c'è ancora chi, come il Villard, trova un irriducibile contrasto fra questa teoria e i fatti.

L'obiezione del Villard si fonda sul seguente ragionamento: nell'ipotesi degl'ioni mobili nella scarica attraverso i gas l'emissione della luce viene attribuita alla dissociazione delle molecole gassose per urto. Conseguentemente, esagerando la ionizzazione, si dovrebbero esagerare i fenomeni luminosi. Ma d'altra parte l'illustre fisico francese osserva che l'azione di un corpo radioattivo, che pur dovrebbe tradursi in un eccesso di ionizzazione, sopprime i fenomeni luminosi della scintilla; di più osserva che se in un tubo a gas rare-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

<sup>(2)</sup> Villard, Journ. de Phys. 7, 350, 1908.

fatto si fa avvenire la scarica, e se nella colonna positiva si fanno arrivare i raggi catodici per mezzo di una piccola ampolla saldata lateralmente sulla parete del tubo, la luminosità della colonna sparisce proprio nella regione che, per essere attraversata dai raggi catodici, dovrebbe presentare esaltati quei fenomeni di luminosità che si attribuiscono agli urti.

Ora a me sembra che queste esperienze non siano tali da non permettere l'accordo con l'ipotesi che fa consistere il passaggio dell'elettricità nel gas in un movimento di ioni, e i fenomeni di luminosità in manifestazioni di urti.

Infatti, bisogna porre mente che gli agenti ionizzanti adoperati dal Villard per far sparire i fenomeni luminosi della scarica introducono nel gas nuovi centri elettrizzati sia portandoveli dall'esterno, sia creandoli nel gas stesso.

Questa sopraproduzione di ioni ha certamente per conseguenza di diminuire il valore del campo elettrico là dove essa ha luogo.

Infatti se chiamiamo con  $n_1$  e con  $n_2$  il numero dei centri elettrizzati positivi e negativi nell'unità di volume, con  $k_1$  e  $k_2$  le mobilità delle due specie di centri, con  $X$  il valore del campo elettrico nel punto che si considera, l'intensità della corrente è data da

$$i = X (n_1 k_1 + n_2 k_2).$$

Conseguentemente lungo la colonna conduttrice  $X$  sarà tanto più piccolo quanto più grande sarà il numero degl'ioni presenti, e nei punti dove il numero degl'ioni supera un certo limite, il campo avrà un valore troppo basso per provocare delle dissociazioni e per dar luogo ai fenomeni luminosi.

Così in ultima analisi gli agenti ionizzanti adoperati dal Villard per eliminare la luminosità della colonna positiva da un lato contribuiranno a rendere luminoso il gas per mezzo dei loro urti, dall'altro determineranno una diminuzione dei fenomeni luminosi preesistenti.

E non c'è nulla di strano che, almeno in condizioni particolari, l'ultimo effetto non abbia una grande prevalenza sul primo, cosicchè si verifichi il fenomeno osservato dal Villard nella scarica.

2. *Distribuzione delle cariche nell'arco.* — Allo stato attuale della conoscenza sul funzionamento dell'arco voltaico, non trovo ragioni sufficienti per scartare la teoria che attribuisce la conduzione nell'arco agl'ioni mobili nel gas sotto l'azione del campo elettrico.

Ammesso questo, la distribuzione del campo elettrico lungo l'arco può dedursi dalla distribuzione del potenziale lungo di esso. Ora, secondo le determinazioni della signora Ayrton <sup>(1)</sup>, il potenziale lungo un arco voltaico è distribuito conformemente alla rappresentazione grafica della figura 1.

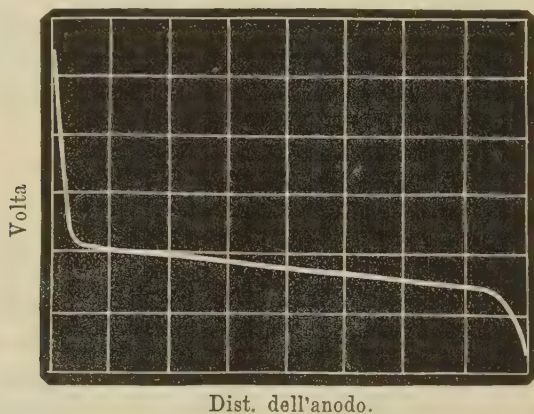
(<sup>1</sup>) Ayrton, Lond. Elect. 41, 720.



Nella regione centrale si ha una variazione lenta e uniforme del potenziale  $V$ , mentre presso gli elettrodi si ha un brusco salto, più grande assai presso l'anodo che presso il catodo. Da ciò risulta facile desumere la distribuzione delle cariche nell'arco (<sup>1</sup>). Se questo è rettilineo, prendendo per direzione positiva dell'asse  $x$  quella dell'arco volta dall'anodo al catodo, e chiamando  $\rho$  la densità elettrica si ha

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -4\pi\rho.$$

Ma nella regione centrale dell'arco  $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$  quindi la densità  $\rho$  è zero: ossia nel tratto centrale l'arco è costituito da un ugual numero di joni positivi e negativi.



Chiamiamo con  $X$  la forza elettrica nel punto generico del campo, ossia poniamo

$$X = -\frac{dV}{dx}.$$

Avremo

$$\frac{dX}{dx} = 4\pi\rho$$

e

$$X_1 - X_0 = 4\pi \int_0^1 \rho dx.$$

Vicino al catodo  $X_1 < X_0$  e quindi  $\rho$  è negativo; vicino all'anodo succede il contrario. Quindi nell'arco presso gli elettrodi si ha un eccesso di

(<sup>1</sup>) Child, Phys. Rev. 10, 155, 1900.

*ioni di un segno su quelli del segno opposto: precisamente, presso l'anodo sovrabbondano i centri negativi e presso il catodo quelli positivi.*

3. *Origine delle cariche nell'arco.* — Dunque nell'arco si riscontrano ioni dei due segni.

Sull'origine dei corpuscoli tutti sono concordi nel ritenere che essi siano per la massima parte emessi dal catodo. Gl'ioni positivi saranno in parte forniti dalle dissociazioni che operano lungo la strada. Ma avendosi, quando non si usino particolari disposizioni, oltre al catodo, anche l'anodo rovente non si può escludere che quest'ultimo emetta ioni e contribuisca in qualche misura alla conduzione. L'aver realizzato per parte di Stark e Cassuto <sup>(1)</sup> un arco ad anodo freddo sembrerebbe affermare che l'arco può esistere anche senza l'emissione di ioni positivi dall'anodo. Ma da un lato non si può a priori asserire che l'emissione dall'anodo caldo, quando fosse presente, non acquisti un'importanza notevole se non una preponderanza assoluta. Dall'altro non bisogna dimenticare che alla pressione ordinaria l'emissione degl'ioni positivi dai solidi incomincia a una temperatura assai bassa <sup>(2)</sup> ed è molto dubbio che il mezzo escogitato dai due sperimentatori soprannominati per mantenere freddi gli elettrodi sia stato sufficiente per escludere una emissione di ioni positivi dall'anodo.

Per lo studio della costituzione dell'arco giova decidere in merito alla emissione di ioni da parte dell'anodo giacchè essa, quando fosse presente, avrebbe per effetto di stabilire fra l'arco e l'anodo delle forze che darebbero al fenomeno delle caratteristiche notevoli.

4. *Adesione dell'arco agli elettrodi.* — Infatti se la conduzione è operata per mezzo di centri elettrizzati essi seguono costantemente le linee di forza del campo; e se i centri hanno origine unicamente nella massa del gas compreso fra gli elettrodi che stabiliscono il campo, le traiettorie dei centri sono indipendenti dai movimenti degli elettrodi finchè le linee di forza rimangono invariate nello spazio. Una colonna conduttrice in queste condizioni collegherebbe i due elettrodi, ma non presenterebbe con essi nessuna adesione.

Invece se le regioni degli elettrodi in cui si imposta la colonna conduttrice fossero esse stesse dei focolai di emissione dei centri elettrizzati, allora gli estremi della colonna sarebbero fissi agli elettrodi e ne seguirebbero fino a un certo punto i movimenti, mostrando con essi una specie di adesione.

Esaminiamo ora ciò che accade nell'arco: perpendicolarmente a una lastra di carbone L mobile nel proprio piano disponiamo un carbone cilin-

<sup>(1)</sup> Stark e Cassuto, Nuovo Cimento, 7, 425, 1904.

<sup>(2)</sup> Occhialini, Rend. Acc. Lincei, 16, 119, 1907.

drico A fisso. Fra A ed L stabiliamo un arco e poi facciamo correre la lastra mantenendo inalterata la sua distanza dal carbone cilindrico; allora osserviamo un fatto costante: il cratere posto sulla lastra mantiene inalterata la propria posizione e ne segue i movimenti (fig. 2), tanto se la lastra è anodo, quanto se è catodo. Nell'un caso e nell'altro si ha adesione al cratere; soltanto questa è assai più forte per il cratere negativo che per il cratere positivo.

Infatti, quando la lastra è negativa, questa nel suo spostamento porta con sé il cratere, finchè l'arco non si spegne per l'eccessiva lunghezza; invece se la lastra è positiva il suo spostamento è seguito dal cratere fino a un certo punto oltrepassato il quale il cratere scivola sull'elettrodo.

Per ciò che si è detto precedentemente si può asserire che *l'adesione dell'arco agli elettrodi indica che tanto l'anodo quanto il catodo emettono delle cariche.*

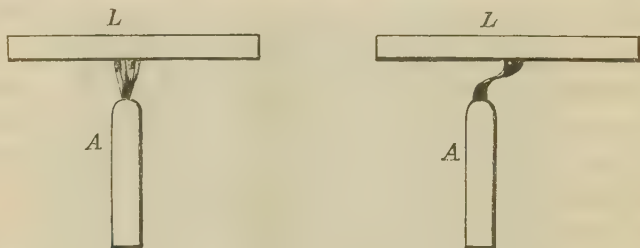


FIG. 2.

Per quanto riguarda il catodo, questo fatto non porta nulla di nuovo: invece l'emissione dall'anodo esiste, pur non essendo essenziale nel processo dell'arco voltaico. Ma questa emissione è una conseguenza dell'alta temperatura dell'anodo e, essenziale o no, essa rivela con particolarità che nello studio dell'arco è necessario mettere in conto.

Con ciò la funzione dell'anodo appare non limitata a stabilire il campo elettrico e a mantenere la corrente col raccogliere i corpuscoli emessi dal catodo; come il catodo, sebbene in misura assai minore, esso fornisce il materiale per la conduzione dell'arco voltaico.

5. *Coesione e contrattilità dell'arco voltaico.* — Oltre all'adesione che l'arco manifesta sugli elettrodi vi sono altre forze che si manifestano nell'interno dell'arco in conseguenza della sua costituzione. L'arco, risultando di un insieme di ioni positivi e negativi è soggetto a delle azioni elettrostatiche, per effetto delle quali non riuscirà frammentario o slegato, ma presenterà una notevole coesione.

Queste forze poi tendono a raccorciare l'arco, tanto che una diminuzione della sua lunghezza è sempre accompagnata da una diminuzione della dif-



ferenza di potenziale agli estremi. Perciò l'arco oltre alla coesione deve presentare una contrattilità in conseguenza della quale esso assume sempre la forma più breve compatibilmente con i vincoli a cui è soggetto. L'arco, dunque, si comporterà per certi riguardi come una fune flessibile ed elastica. Questa contrattilità è posseduta anche dalla luce positiva dei tubi a vuoto, e in questo caso è stata verificata dal Villard mediante una serie di esperienze elegantissime riproducenti i fenomeni delle corde vibranti.

6. *Conclusioni.* — Dalle osservazioni e dalle esperienze esposte in questa Nota mi sembra di poter concludere che:

1°. L'ipotesi che l'arco sia costituito di un insieme di centri elettrizzati mobili in senso opposto non urta con i fatti noti.

2°. Tanto il catodo quanto l'anodo emettono delle cariche elettriche.

3°. La contrattilità e la coesione dell'arco sono conseguenza della sua costituzione.

In una prossima Nota cercherò di approfondire lo studio della costituzione dell'arco esaminando il suo comportamento nel campo magnetico.

**Fisica** — *Sul comportamento magnetico-ottico della linea  $b_4$  del Magnesio*<sup>(1)</sup>. Nota di MARIO TENANI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Do in questa Nota una breve relazione delle ricerche da me istituite per l'accertamento sperimentale della differenza tra lo sdoppiamento della doppietta longitudinale e quello delle linee laterali del tripletto presentato dalla linea  $b_4$  del magnesio —  $\lambda = 5167,41$  — per applicare poi a tale caso quelle considerazioni che ho svolto in una mia recente pubblicazione<sup>(2)</sup>.

Come spettroscopio mi servii di un reticolo di Rowland del raggio di m. 3,22. La superficie rigata ha una lunghezza di circa 8 cm. e 568 righe per mm. La montatura del reticolo è quella di Rowland, molto stabile in modo da assicurare una immobilità praticamente assoluta al sistema ottico. La fenditura del reticolo era una fenditura di precisione col tamburo della vite micrometrica graduato in centesimi di millimetro. Ad essa fu dato quasi sempre una larghezza vicina a mm. 0,03.

I vapori da esaminarsi erano portati all'emissione luminosa mediante la scintilla fra elettrodi del metallo in studio. A portata di mano dell'osservatore si trovava l'interruttore di un rocchetto Rumkorff di 35 cm. di scin-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica dell'Univ. di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

<sup>(2)</sup> Rendic. Acc. Linc., vol. XVIII, pag. 595 (1909).

tilla, il quale serviva a caricare una batteria di condensatori di capacità di circa 0,08 microfarad, che scaricandosi attraverso una conveniente autoinduzione (calcolata circa 0,001 henry) producevano una serie di scintille luminosissime fra gli elettrodi. La scintilla avveniva nell'interspazio dei poli di un elettromagnete di Weiss da cui le punte dello spinterometro erano isolate da sottili fogli di mica.

Uno dei nuclei dell'elettromagnete era opportunamente forato per l'esame longitudinale; l'altro nucleo venne invece scelto massiccio. Il foro del nucleo forato era di circa 2 cm. di diametro: si restringeva però a circa 5 mm. alla estremità polare. La scintilla aveva una lunghezza di circa 2 mm. e si poteva ragionevolmente ritenerla immersa in un campo uniforme <sup>(1)</sup>. La luce emessa perpendicolarmente al campo veniva raccolta da una lente e mediante una serie di tre prismi a riflessione totale, condotta a produrre un'immagine reale della scintilla a qualche distanza dalla fenditura.

La luce emessa secondo le linee di forza attraverso il foro dell'elettromagnete era condotta anch'essa, dopo avere attraversato un obbiettivo a produrre un'immagine della scintilla immediatamente sotto a quella fornita dalla luce trasversale.

Con opportuna manovra delle lenti e dei prismi non era difficile condurre le due immagini in uno stesso piano verticale e immediatamente contigue. Di queste due immagini una lente a fuoco piuttosto lungo (60 cm. circa) produceva un'immagine virtuale, necessariamente un po' ingrandita, a una certa distanza dalla fenditura. Questa distanza era scelta in modo che il reticolo desse un'immagine stigmatica della sorgente luminosa e aveva quindi per effetto che, eliminato l'astigmatismo, gli spettri delle due luci non si confondessero, e fosse possibile il confronto degli sdoppiamenti nei punti corrispondenti delle due immagini.

La disposizione qui indicata, che ha il vantaggio sopra le altre finora usate di eliminare ogni lente dopo la fenditura, mi è stata suggerita da un articolo di F. L. Shirks <sup>(2)</sup> in cui è descritto un modo per potere usare col reticolo il prisma di paragone. Per evitare che in conseguenza dell'astigmatismo i due spettri (lo spettro da confrontare e lo spettro di paragone) si

<sup>(1)</sup> In realtà l'uniformità del campo dell'elettromagnete era alquanto turbata in conseguenza del foro: ciò mi fu rilevato dalla costruzione degli spettri magnetici da me eseguiti su consiglio del prof. A. Cotton, che, in una lettera che mi onora, ebbe a prendere in esame le modalità di queste esperienze. Ma della piccolezza dell'effetto di tale inomogeneità è facile convincersi, se si pensa che scintille così corte (ad onta del loro lento periodo) vengono ben poco soffiate dal campo; e che l'esame dei clichés mi ha dimostrato che, sebbene le varie parti della scintilla si venissero a trovare in regioni diverse del campo, pur tuttavia lo sdoppiamento era sensibilmente costante in tutti i punti della linea.

<sup>(2)</sup> *On the astigmatism of Rowlands concave Gratings*. Astron. and Astroph., 13, pp. 763-761 (1894).

confondano, sovrapponendosi in parte, egli consiglia di porre il prisma di confronto non vicino alla fenditura, ma a una certa distanza da questa: il modo di dedurre immediatamente questa distanza si ricava con una semplicissima costruzione geometrica <sup>(1)</sup>.

Analogamente, nel caso mio, la lente da ultimo nominata produceva alla distanza voluta dalla fenditura le due immagini virtuali della sorgente luminosa: sulla lastra fotografica le luci provenienti dalle due immagini formavano due spettri separati da un sottile tratto oscuro.

Per ben giudicare della giusta posizione della lente che produceva le immagini virtuali, dopo aver curato di portare le due immagini il più esattamente possibile nello stesso piano, tendevo un sottile filo orizzontale attraverso ciascuna di esse: aggiustavo poi la lente in modo che gli spettri delle luci da essa provenienti fossero attraversati da una linea più sottile che fosse possibile, immagine del filo.

Con opportuni diaframmi cercavo poi di dare ai due spettri così ottenuti la stessa chiarezza per quanto mi era possibile.

In previsione delle lunghe pose che si rendevano necessarie veniva preventivamente inserita nel circuito dell'elettromagnete una resistenza regolabile, che, durante la posa, seguendo le indicazioni di un amperometro, veniva gradualmente tolta in modo da compensare così l'aumentata resistenza dell'elettromagnete per lo sviluppo di calore. Così si riusciva a mantenere inalterata, nei limiti di sensibilità dell'amperometro la intensità del campo magnetico.

Nelle mie fotografie usai con profitto le lastre « Ortocromatiche Nuove » del Cappelli: le pose duravano dai 35 ai 40 primi.

Le misure vennero effettuate sulle fotografie mediante un ottimo comparatore Froment; il microscopio di tale comparatore è a debole ingrandimento (dalle 8 alle 10 volte): il puntamento vien fatto mediante un incrocio di fili a circa 50°. Il nonio del comparatore può dare il centesimo di millimetro, che, nelle fotografie ottenute, corrisponde a una differenza di lunghezza d'onda di circa  $0,03 \cdot 10^{-8}$  cm.

Le ricerche sperimentali da me finora eseguite vertono, come ho detto, sulle linee della seconda serie secondaria degli elementi del secondo gruppo di Mendelejeff e naturalmente su quelle che nel campo magnetico presentano una scomposizione in tripletto.

Come è noto gli studî già eseguiti su queste linee <sup>(2)</sup> ne stabilirono il comportamento pienamente conforme alla teoria ordinaria: soltanto che si

<sup>(1)</sup> Vedi a questo proposito la Memoria citata.

<sup>(2)</sup> Preston, Runge e Paschen, *Memorie varie*; Reese, *Astroph.*, J. XII, 120 (1900); Kent, *Astroph.*, J. XIII, 289 (1901); Färber, *Ann. d. Ph.*, IX, 886 (1902); Cotton e Weiss, *Journal de Ph.*, (4), 6, 429 (1907).



trovò pel valore  $\frac{c}{m}$ , calcolato in base allo sdoppiamento magnetico, un valore quasi doppio di quello trovato dalle esperienze sui raggi catodici, e sulle linee che presentano il così detto tripletto normale di Lorentz e non avente alcun legame evidente con quel valore.

Le mie misure si riferiscono a 4 *cliché* ottenuti fotografando nel 2° ordine la linea  $b_4$  del Mg, che, fra quelle nominate, si presentava in condizioni più opportune.

Su ogni fotografia, le misure vennero fatte nel seguente modo: si valutava la distanza delle componenti magnetiche facendo la media di quattro successive letture; poi si faceva scorrere la lastra nel senso della riga di qualche tratto e si ripeteva la lettura. Ciò mi parve più conveniente che non ripetere molte volte il puntamento sugli stessi punti della riga. Dopo tre serie di misure si prendeva la media dei tre risultati ottenuti che non differivano mai più di un centesimo di mm.

Le 4 fotografie vennero eseguite con valori del campo diversi. Le accurate misure già citate di Weiss e Cotton mi permettevano di valutare il campo con una buona approssimazione: i campi da me sperimentati furono 18,600, 17,500, 16,000 e 15,200 gauss rispettivamente nei varî *clichés*.

Da queste misure è risultato che la differenza tra gli sdoppiamenti delle righe in istudio emesse longitudinalmente e perpendicolarmente al campo è (nei limiti della precisione della esperienza) indipendente dal campo e uguale quindi nei 4 *clichés* ottenuti. Precisamente esso risultò di mm.  $0,04 \pm 0,008$ . La finezza delle linee da me ottenute sulle fotografie, permetteva di fare le letture speditamente e con grande decisione. La distanza così misurata venne tradotta in lunghezza d'onda, misurando volta per volta nella posizione stessa del reticolo, con cui venivano fatte le precedenti fotografie le distanze in mm. tra la riga  $b_4$  e la vicina  $b_2$  fotografate in assenza del campo, e ritenendo (come è possibile) proporzionali le distanze alla differenza di lunghezza d'onda. Con tal mezzo potei valutare la differenza tra i valori dello sdoppiamento costantemente in

$$\text{cm. } 0,12 (2) \cdot 10^{-8};$$

le lunghezze d'onda delle linee  $b_2$  e  $b_4$  vennero desunte dai dati di Kayser e Runge.

Risulta intanto da questo risultato un buon accordo colle deduzioni teoriche. Infatti è ben vero che la teoria non fa ritenere la detta differenza di lunghezza d'onda costante: essa fa ritenere costante la differenza fra i quadrati degli sdoppiamenti nella scala delle frequenze. Ora se  $\delta$  e  $\delta_1$  sono i valori espressi nella scala delle lunghezze d'onda degli sdoppiamenti, la differenza suddetta è espressa da

$$\frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_0^4} (\delta_1^2 - \delta^2) = \frac{4\pi^2 c^2}{\lambda_0^4} 2\delta (\delta_1 - \delta);$$

e siccome  $\delta$  è stato trovato proporzionale al campo, a rigore essa risulta inversamente proporzionale al campo: ma nei limiti in cui abbiamo potuto far variare la intensità del campo in queste misure  $\delta_1$  —  $\delta$  viene a variare così poco che la corrispondente differenza in mm. che è oggetto delle misure rimane (come facilmente può verificarsi in base ai dati già esposti) costante nei limiti di approssimazione delle nostre osservazioni: e ciò si è sperimentalmente verificato.

Già esponendo il metodo da noi proposto <sup>(1)</sup> per valutare le costanti della teoria, avvertimmo della difficoltà che si è incontrata nell'accertarsi della applicabilità o meno della teoria alle linee di studio e come questa verifica manchi in tutti i casi finora studiati con gli altri metodi. Ora come là abbiamo detto, il nostro metodo di studio permette un agevole confronto che può dare già indizi abbastanza sicuri per attaccare questa questione. Ed è perciò che prima di accingerci al calcolo della costante  $\rho$  e della densità del vapore in istudio noi dobbiamo accingerci allo studio della dissimmetria del tripletto, per vedere se essa sia quale il valore della differenza misurata lascia prevedere.

Se non troveremo la concordanza che la teoria ci lascia prevedere, mentre da una parte ci sarà impedito di procedere al calcolo di quei parametri di cui sopra abbiamo mostrato il metodo di deduzione, potremo, d'altra parte, dedurne senz'altro la non applicabilità dell'ordinaria teoria a queste righe e cercare se ciò possa essere messo in relazione con quella divergenza (che tante discussioni ha sollevate) tra il valore del rapporto  $\frac{e}{m}$  dedotto pei raggi catodici (1,878, in unità elettromagnetiche a meno dell'1 %. Kaufmann, Ann. d. Ph. 19, p. 540, a. 1906; Guye, Arch. de Genève, mars et avril 1906) e quello trovato per queste linee da Cotton e Weiss (3,534 con una approssimazione relativa superiore all'1 %).

Ricordiamo infatti che per le formule (6) del mio citato lavoro, il valore di  $N$ , dedotto per mezzo del confronto ora eseguito deve coincidere col valore della dissimmetria del tripletto: sicchè accordo pieno con la teoria si avrà allora soltanto che la differenza tra i valori  $\mu_1$  e  $\mu_2$  delle distanze delle righe laterali del tripletto dalla frequenza primitiva sarà uguale a  $N$ . Come si è accennato a proposito delle esperienze dello Zeeman sui tripletti dissimmetrici, è ben difficile poter accertare se la riga mediana del tripletto conservi la lunghezza d'onda stessa della riga primitiva e quindi se i valori dedotti sperimentalmente misurando le distanze delle righe laterali dalla linea mediana possano fornire una misura esatta della dissimmetria come qui va intesa: però è da notarsi che se un tale spostamento della linea mediana

<sup>(1)</sup> V. il lavoro già citato.

interviene, ciò basta per escludere da sè l'applicabilità della teoria su cui ci siamo fondati e che ne afferma la immobilità <sup>(1)</sup>.

Prendiamo ad esempio il cliché n. 1. Da esso si ricava

$$\delta = 0,94 (5) \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

$$\delta_1 = 1,05 (3) \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

In base a quanto si è detto, la differenza di frequenza delle linee laterali del tripletto sarà  $\frac{2 \pi c \delta_1}{\lambda_0^2}$  e questo dovrà per la (8) essere espresso

da  $\sqrt{4 \mu_0^2 + N^2}$  cioè  $\sqrt{\frac{4 \pi^2 c^2 \delta^2}{\lambda_0^2} + N^2}$ ; onde

$$N^2 = \frac{4 \pi^2 c^2}{\lambda_0^4} (\delta_1^2 - \delta^2).$$

Ma

$$\lambda_0 = 516 \cdot 10^{-7} \text{ cm.}$$

$$\delta_1^2 = 1,11 \cdot 10^{-16}$$

$$\lambda_0^4 = 72 \cdot 10^{-19}$$

$$\delta^2 = 0,89 \cdot 10^{-16}$$

$$4 \pi^2 c^2 = 3,6 \cdot 10^{22}$$

$$\delta_1^2 - \delta^2 = 0,22 \cdot 10^{-16};$$

da questi dati si deduce

$$N^2 = 10,8 \cdot 10^{22}$$

$$N = 3,3 \cdot 10^{11}.$$

Per quanto si è detto, questo dovrebbe essere il valore della dissimmetria del tripletto. Tradotto nella scala delle lunghezze d'onda N risulta

$$0,4 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Misure dirette della dissimmetria del tripletto hanno invece fornito come suo valore al più

$$0,03 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

L'enorme differenza fra il valore calcolato e il valore trovato conduce dunque a ritenere che alle linee da noi prese in esame non si possa applicare la teoria ordinaria e quindi il nostro metodo di calcolo. Esse sono da ascrivere a casi anomali di fenomeno Zeeman.

Un risultato importante si può dedurre da questa conclusione; rammentiamo che si cercò di spiegare il valore anomalo del rapporto  $\frac{e}{m}$  trovato per queste righe (e per molte altre) coll'ammettere che nell'interno dell'atomo il campo magnetico abbia un valore diverso da quello del campo

<sup>(1)</sup> Voigt, *Magneto- und Elektrooptik*, pag. 92.



magnetico esterno: e ciò si ricollega alla questione pure oggidì tanto discussa dell'esistenza di elettroni positivi.

Tanto per questi casi, come per quelli in cui il rapporto ha un valore diverso dal normale, si suole ammettere che i raggi che ne danno segno, siano dovuti sempre a elettroni negativi aventi il solito valore  $\frac{e}{m}$ , ma percorrenti orbite tali da creare nell'interno dell'atomo, un campo magnetico o maggiore, o minore, o persino di senso contrario al campo esterno. Ora, se ciò realmente avvenisse, nel nostro caso almeno non cesserebbe per questo l'applicazione della teoria ordinaria con quel valore del campo così modificato e non si dovrebbe trovare la divergenza che noi abbiamo osservata.

Occorre piuttosto dire qui che almeno nel caso da noi studiato, i valori trovati nel rapporto  $\frac{e}{m}$ , pur restando costanti caratteristiche di queste righe cessano di avere il significato che la teoria ordinaria loro assegnava.

Concludendo dunque lo studio da noi compiuto sulle linee della seconda serie secondaria degli elementi del secondo gruppo di Mendelejeff, ci ha rivelato:

I. come realmente esistente una differenza di sdoppiamento magnetico nelle due direzioni, normale e parallela al campo;

II. che tale differenza non segue almeno per le linee studiate le leggi che la teoria ci ha lasciato dedurre;

Spero che il nuovo metodo di studio qui usato, con l'applicazione di campi magnetici più intensi ed estesi come quelli che potrà fornirmi un grande elettromagnete, ora quasi ultimato per questo Istituto di Fisica, mi permetterà di volgere i miei studi su altre linee che i mezzi attualmente a mia disposizione non avrebbero permesso di studiare completamente.

**Fisica** — *Azione della luce ultravioletta sulla distanza esplosiva nell'aria.* Nota di L. TIERI, presentata dal Socio. P. BLASERNA.

Come è noto, Hertz, nel corso delle sue classiche ricerche sulle oscillazioni elettriche, dimostrò che la luce ultravioletta, fatta cadere sul catodo di un eccitatore, favorisce la produzione delle scintille (<sup>1</sup>). In seguito Elster e Geitel (<sup>2</sup>) trovavano che la luce ultravioletta può agire in modo impedente sulle scariche operando con una macchina di Holtz con due eccitatori in derivazione, dei quali, quello con cui si studiava il fenomeno, era formato da una pallina e da un disco di zinco ben amalgamato. Anche in questo caso

(<sup>1</sup>) Wied. Ann., t. XXXI, pag. 983, 1887.

(<sup>2</sup>) Wied. Ann., t. XXXIX, pag. 332, 1888.

Elster e Geitel trovavano che vuol essere illuminato il disco costituente il catodo. Nel 1896, in uno studio sull'azione dei raggi Röntgen e della luce ultravioletta sulla scarica esplosiva nell'aria <sup>(1)</sup>, Sella e Majorana, ponendo in derivazione sul secondario di un rocchetto un tubo Crookes opportunamente schermato e un eccitatore con sfere di ottone amalgamato di un determinato diametro, trovavano che regolando opportunamente l'intensità della corrente nel primario del rocchetto, in modo da avere scintille di lunghezze massime variabili, la luce ultravioletta di una lampada ad arco esercitava un effetto favorente sulla scintilla per distanze relativamente piccole delle sfere dell'eccitatore; mentre aumentando la distanza di queste, si arrivava ad un punto in cui la luce ultravioletta non aveva più nessun effetto; con un ulteriore aumento della distanza la scarica veniva impedita dalla luce ultravioletta. Osservarono inoltre che pel fenomeno di Hertz il polo illuminato vuole essere il negativo: per l'effetto impedito il polo positivo. Essi conclusero che il presentarsi dell'effetto favorente o impedito dipende dalla distanza degli elettrodi; e che la distanza neutra, quella cioè in cui la luce ultravioletta non ha nessuna azione, varia col diametro degli elettrodi dell'eccitatore.

Le importantissime ricerche di Righi <sup>(2)</sup>, di Hallwachs <sup>(3)</sup> e di Stoletov <sup>(4)</sup> sulla dispersione di una carica negativa sotto l'influenza della luce ultravioletta, dispersione che trova la sua interpretazione nei lavori del Righi <sup>(5)</sup> e del Lenard <sup>(6)</sup>, ci spiegano in modo esauriente il fenomeno di Hertz: nessuna spiegazione possibile si ha invece per l'effetto impedito.

Ripetendo l'esperienza di Elster e Geitel con elettrodi sferici, ebbi modo di confermare una osservazione dei due autori e che a mio parere è di importanza fondamentale per la spiegazione del fenomeno di impedimento della scarica dovuto alla luce ultravioletta. Elster e Geitel segnalano invero che qualora sia grande la distanza tra la sfera positiva e il piano di zinco amalgamato, il fiocco che così si determina viene reso più difficile dall'illuminazione del piano.

Ritenendo che appunto in ciò si abbia la spiegazione del fenomeno, come sarà visto più in là, ho voluto mettere bene in evidenza questa influenza ostacolatrice della luce ultravioletta sulla produzione del fiocco. Sostituendo nel dispositivo Elster e Geitel al disco amalgamato e alla sferetta due palline di zinco, ben pulite con carta smerigliata finissima, di 16 mm. di diametro, poste a conveniente distanza, si dimostra anche in tal caso l'ef-

(1) R. Acc. dei Lincei, t. V, 1° sem., 1896.

(2) Rend. Acc. dei Lincei, IV serie, vol. IV, 1° sem. 1888.

(3) Wied. Ann., t. XXXIII, pag. 301, 1888; t. XXXIV, pag. 731, 1888.

(4) Comptes rendus, t. 106, pag. 1149, 1888; t. 107, pag. 91, 1888.

(5) Nuovo Cim., III serie, 1888, 1889.

(6) Ann. der Physik, t. 2, pag. 359, 1900.

fetto impendente dovuto alla illuminazione: un fiocco anodico accompagna le scintille quando la luce ultravioletta viene soppressa; il fiocco è ancora più visibile se il catodo è in comunicazione col suolo. Facendo cadere la luce ultravioletta di una lampada ad arco, concentrata con lenti di quarzo, sul catodo, scompaiono scintille e fiocco. Per mettere meglio in evidenza l'azione sul fiocco, ho preso come catodo una sfera di zinco del diametro di 3 cm.

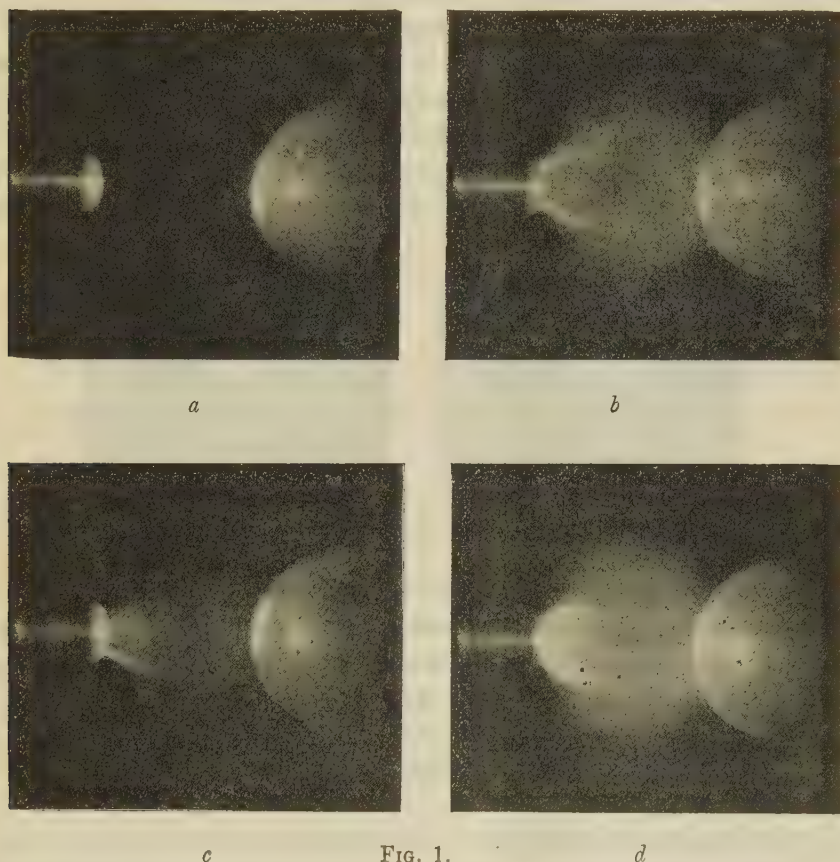


FIG. 1.

in comunicazione col suolo, e come anodo una calotta del diametro di 1 cm. Regolando convenientemente le distanze dei due eccitatori in derivazione, ottenevo un bel fiocco nell'anodo quando sopprimevo la luce ultravioletta per mezzo di una lastra di vetro dello spessore di 2 mm.; il fiocco scompariva completamente o si indeboliva quando la luce ultravioletta giungeva sul catodo.

Le fotografie della fig. 1, ottenute con obiettivo di quarzo, ritraggono il fenomeno per due distanze diverse tra le sfere dell'eccitatore. Le *a* e *b* furono ottenute per la distanza di cm. 2,5 tra le sfere; la posa per ognuna fu di 2<sup>m</sup>30<sup>s</sup>; le *c* e *d* per la distanza di cm. 2,3, con posa di 1<sup>m</sup>30<sup>s</sup>. Le *a* e



*c* si ottennero mentre il catodo era illuminato, le *b* e *d* si ottennero sopprimendo la luce ultravioletta. Avvicinando opportunamente le sfere, fino a che si produca nettamente l'effetto favorente di Hertz, non si riesce a rivelare il fiocco anodico.

Le esperienze precedenti furono fatte anche sostituendo alla macchina di Holtz il rocchetto. Il dispositivo più adatto per lo scopo fu il seguente: il secondario del rocchetto era rilegato ad un eccitatore in modo che il polo negativo per le correnti d'apertura fosse una sfera di zinco del diametro di 3 cm. e il polo positivo una punta di zinco alquanto arrotondata. Il polo negativo era inoltre in comunicazione col suolo. La punta era alla distanza di circa 13 mm. dalla sfera. Regolando con apposite resistenze l'intensità della corrente che alimentava il primario del rocchetto, non si presentava o si presentava il fiocco anodico secondo che la luce ultravioletta arrivava o

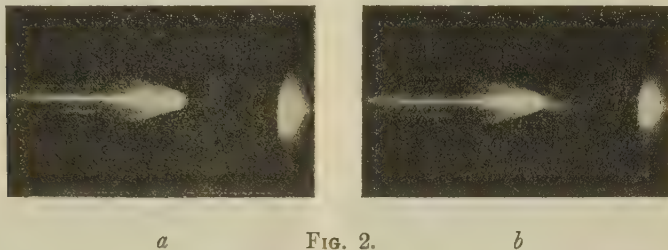


FIG. 2.

no sul catodo. Come ho già detto precedentemente la luce ultravioletta veniva concentrata sul catodo per mezzo di due lenti di quarzo in modo da avere sul catodo stesso l'immagine dei carboni della lampada ad arco a grandezza naturale. Le fotografie della fig. 2 rappresentano nettamente il fenomeno. La *a* fu ottenuta con luce ultravioletta; la *b* si ottenne sopprimendo la luce ultravioletta con lastra di vetro dello spessore di mm. 2. La posa fu per entrambe di 3<sup>m</sup>.

Nella soppressione dell'effluvio causata dalla luce ultravioletta, soppressione nettamente dimostrata dalle esperienze su riferite, risiede a mio parere la causa del così detto effetto Elster e Geitel consistente nell'azione ostacolatrice dovuta all'illuminamento. Si tenga presente invero, come fu dimostrato specialmente da Swyngedauw (<sup>1</sup>), che l'effluvio ha un'azione diretta estremamente favorevole alla produzione della scintilla: quest'azione sembra anzi incomparabilmente più energica di quella dovuta ad una luce ultravioletta estranea rivelantesi nel fenomeno di Hertz; ed ha per origine tanto un'azione diretta della scarica ad effluvio, quanto, molto probabilmente, un'azione della luce ultravioletta propria dell'effluvio medesimo. È chiaro allora che se la

(<sup>1</sup>) Éclairage Électrique, vol. XI, 2° trim. 1897, p. 397.

luce estranea interviene estinguendo l'effluvio, come è dimostrato dalle esperienze precedenti, viene con ciò a mancare un'energica azione favorente per la scintilla, cosicchè può ben avvenire che in totale la luce renda più difficile la produzione di questa. L'effetto impedito della luce sarebbe quindi, per dir così, un fenomeno apparente, in quanto essa sopprime un'energica causa favorente qual'è l'effluvio.

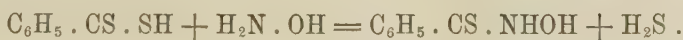
Non è improbabile che la medesima spiegazione valga per il fenomeno analogo trovato da Sella e Majorana con i raggi X <sup>(1)</sup> e da Stefanini e Magri con i raggi del radio <sup>(2)</sup>.

Tutte queste radiazioni agirebbero cioè ostacolando la formazione dell'effluvio per la ionizzazione creata fra gli elettrodi.

**Chimica.** — *Su gli acidi tioidrossamici* <sup>(3)</sup>. Nota di LIVIO CAMBI, presentata dal Corrispondente A. ANGELI.

Finora non era noto nessun acido tioidrossamico, contenente il gruppo — CS.NHOH ovvero  $\text{—C} \begin{array}{l} \text{NOH} \\ \text{SH} \end{array}$ . Composti di un tale tipo dovevano avere in parte un comportamento analogo a quello degli acidi idrossamici  $\text{R—C} \begin{array}{l} \text{NOH} \\ \text{OH} \end{array}$ , ma dovevano pure differenziarsi da questi: la vicinanza dell'atomo di solfo al gruppo ossimico doveva imprimere a questi corpi una capacità a reagire particolare. D'altro lato, per l'importanza sempre maggiore che va acquistando la chimica dei composti solforati, la sintesi e lo studio di questi acidi presentava un interesse notevole.

L'idrossilamina agisce sui tiochetoni generando le ossime, con formazione di idrogeno solforato <sup>(4)</sup>; reagisce sulla tiobenzamide formando l'amidoossima <sup>(5)</sup>. Analogamente, facendo reagire l'idrossilamina, in rapporti equimolecolari, sull'acido ditiobenzoico, ho ottenuto l'acido tiobenzidrossamico; secondo la reazione:



Ho preparato il sale di potassio dell'acido ditiobenzoico facendo agire il fenilcloroformio sul solfuro potassico, in soluzione alcoolica, nelle quantità

<sup>(1)</sup> R. Acc. Lincei, t. V, 1° sem. 1896.

<sup>(2)</sup> Nuovo Cim., serie V, t. VII, pag. 170; 1° sem. 1904.

<sup>(3)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica-farmaceutica del R. Istituto di studi superiori in Firenze.

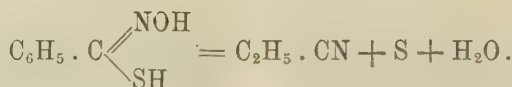
<sup>(4)</sup> Gattermann, Berichte 28, pag. 2870.

<sup>(5)</sup> Tiemann, Berichte, 19, pag. 1668,

calcolate <sup>(1)</sup>; alla soluzione acquosa del sale ho aggiunto quella ottenuta saturando il cloridrato di idrossilamina con la quantità corrispondente di carbonato potassico: la soluzione di colore rosso aranciato intenso del tiosale viene rapidamente decolorata a freddo, con svolgimento di idrogeno solforato.

Il sale dell'acido tiobenzidrossamico formatosi venne estratto con alcool dal residuo di sali ottenuto concentrando nel vuoto la soluzione acquosa, in cui aveva reagito l'idrossilamina. Acidificando invece con acido solforico diluito la soluzione stessa, si libera l'acido idrossamico oleoso, che venne estratto con etere.

La soluzione dell'acido tiobenzidrossamico dà con cloruro ferrico una colorazione azzurro-violacea, e in eccesso un precipitato nerastro. L'acido idrossamico ed i suoi sali alcalini si scompongono facilmente perdendo solfo. L'acido libero si scompone in gran parte in solfo e benzonitrile, secondo la reazione :



Per la facilità con cui l'acido ed i suoi sali si alterano, non sono ancora riuscito ad averli allo stato sufficiente di purezza.

Data l'instabilità dei sali ho cercato di caratterizzare l'acido ottenuto sotto forma di etere: ho fatto reagire il cloruro di benzile sul sale di potassio in soluzione alcoolica. L'eterificazione procede rapida, e per completarla, ho riscaldato per mezz'ora circa all'ebollizione. Distillato l'alcool, ho ripreso il residuo con acqua; si è separato così l'etere  $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{C}(\text{NOH}) \cdot \text{S} \cdot \text{C}_7\text{H}_7$ : sostanza bianca, cristallina, che venne purificata dal benzolo. Esso fonde a 120-122°.

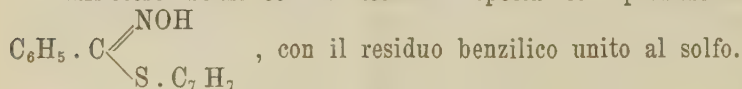
L'analisi ha dato i seguenti risultati:

- I. gr. 0,1667 di sostanza diedero gr. 0,4222 di  $\text{CO}_2$  e gr. 0,0795 di  $\text{H}_2\text{O}$ .
- II. gr. 0,3285 di sostanza diedero gr. 0,3166 di  $\text{BaSO}_4$ .
- III. gr. 0,2187 di sostanza diedero cem. 11,8 di N a mm. 745 e a 22°.

In cento parti:

	Trovato			Calcolato per $\text{C}_{14}\text{H}_{13}\text{NOS}$
	I	II	III	
C	69,07	—	—	69,09
H	5,33	—	—	5,38
S	—	13,24	—	13,19
N	—	—	6,11	5,77.

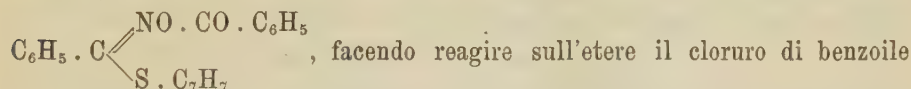
All'etere benzilico su descritto spetta con probabilità la struttura



<sup>(1)</sup> Fleischer, Annalen, 140, pag. 240.



L'etere benzilico si scioglie negli alcali concentrati: in soluzione di etere assoluto, col sodio dà facilmente un sale. Ho ottenuto il benzoilderivato



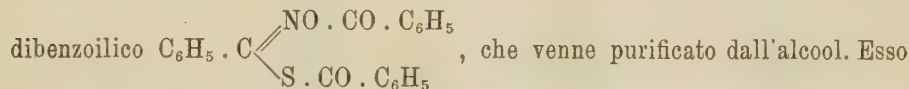
in soluzione piridica. Il composto benzoilico purificato dall'alcool fonde a 135°; la determinazione di azoto ha condotto al risultato seguente:

gr. 0,2520 di sostanza dettero cem. 9,4 di N a mm. 740 e a 22°.

In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{21}\text{H}_{17}\text{NO}_2\text{S}$
N	4,20	4,04

Per confermare la costituzione dell'acido tiobenzidrossamico ho fatto reagire inoltre, nella soluzione acquosa del sale potassico, il cloruro di benzoile in eccesso, alcalinizzando poi con soda; ho ottenuto così il derivato



crystallizza come il derivato precedentemente descritto in piccoli prismi incolori, fonde a 90-92°.

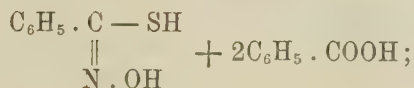
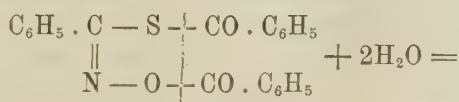
All'analisi ha dato i risultati seguenti:

gr. 0,2621 di sostanza dettero cem. 9 di N a mm. 750 e a 22°.

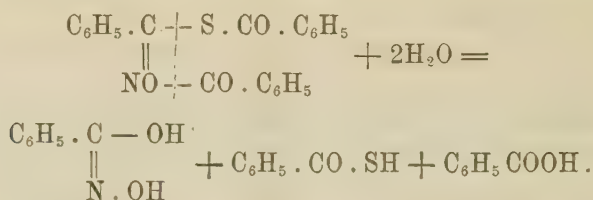
In cento parti:

	Trovato	Calcolato per $\text{C}_{21}\text{H}_{15}\text{NO}_3\text{S}$
N	3,92	3,86

Il composto dibenzoilico dell'acido tiobenzidrossamico resiste all'idrolisi con acido cloridrico diluito, anche all'ebollizione; comportamento analogo a quello del derivato dibenzoilico dell'acido benzidrossamico, nella forma  $\beta$ . Invece viene saponificato dalla potassa alcoolica non molto concentrata, in parte con formazione di acido tiobenzidrossamico ed acido benzoico:



ed in maggior parte in acido benzidrossamico tiobenzico e benzoico:



L'acido benzidrossamico formatosi in questa scissione viene posto anche facilmente in evidenza con la reazione del percloruro di ferro.

Il comportamento dell'acido tiobenzidrossamico e dei suoi derivati costituisce presentemente l'oggetto delle mie ricerche: allo scopo di estendere le conoscenze intorno ai composti di questo tipo, ho intenzione di studiare anche gli altri modi di formazione degli acidi tioidrossamici che la teoria fa prevedere.

**Chimica.** — *Sui composti della fenilidrazina coi fenoli*<sup>(1)</sup>.  
Nota di R. CIUSA e A. BERNARDI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Il contegno della fenilidrazina coi fenoli è stato studiato in primo luogo da A. v. Baeyer<sup>(2)</sup>. Questo autore trovò che la floroglucina e la resorcina si combinano colla fenilidrazina per dare rispettivamente i composti.



nei quali il numero di molecole di fenilidrazina è uguale al numero degli idrossili del fenolo.

Più tardi Seyewitz<sup>(3)</sup> riprese lo studio dei composti della fenilidrazina coi fenoli e trovò che mentre la resorcina, l'idrochinone e l'orcina sono capaci di unirsi alla fenilidrazina, e precisamente nel rapporto di una molecola di fenolo a due di base, il fenolo, i cresoli, i naftoli e la pirocatechina non si uniscono affatto alla fenilidrazina in qualunque maniera si operi.

Escludendo i composti coll'acido pierico, col trinitrotimolo e con altri corpi analoghi, nella letteratura si trova descritto un sol composto della fenilidrazina con fenoli monovalenti: quello col pentaclorofenolo<sup>(4)</sup>. È noto inoltre il composto col trifenilcarbinolo<sup>(5)</sup>.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Adolf v. Baeyer und Ernst Rochendorfer, B. 22, 2189.

(3) Compt. rend., 113 (1891) 264

(4) Jambon, Bl. [3], 23, 829.

(5) Tschitschibabin, B. 35, 4008.

Specialmente a proposito di quest'ultimo composto, sorge il dubbio che anche il fenolo sia capace di combinarsi colla fenilidrazina. Pensando appunto che il composto in questione, che Seyewitz non aveva potuto isolare, fosse assai instabile, abbiamo voluto studiare l'andamento della curva di congelamento tra fenolo e fenilidrazina.

Senza bisogno di disegnarla, l'andamento della curva si vede assai bene dai numeri che riportiamo qui sotto.

	Mol. % di fenolo	Mol. % di fenilidrazina	Temp. di congel.
1	98,40	1,60	41,68
2	93,70	6,30	37,70
3	93,22	6,78	37,25
4	90,01	9,99	33,80
5	87,59	12,41	29,80
6	86,20	13,80	28,95
7	86,10	13,90	27,55
8	82,70	17,30	23,60
9	81,02	19,98	19,05
10	79,52	20,48	18,06
11	77,20	22,80	19,10
12	75,10	24,90	19,65
13	74,80	25,20	22,35
14	68,42	31,58	26,40
15	62,15	37,85	34,90
16	56,79	43,21	39,50
17	51,32	48,68	40,15
18	48,07	51,93	41,35
19	44,87	55,13	40,25
20	41,67	58,33	39,35
21	38,42	61,58	36,55

Questa curva, se disegnata, darebbe un minimo a 18°,06, punto eutectico del sistema fenolo e composto tra fenolo e fenilidrazina, ed un massimo tra la 17<sup>a</sup> e 18<sup>a</sup> concentrazione (50 mol. di fenolo e 50 mol. di fenilidrazina) ad una temperatura di circa 42°. Non abbiamo creduto necessario studiare anche l'altro ramo della curva, perchè non presentava alcun interesse per la questione che si voleva risolvere, ed anche per la grande sensibilità nostra alla fenilidrazina.

Dal modo di comportarsi del miscuglio nella provetta crioscopica, era facile accorgersi che il composto in questione era assai stabile, e che doveva essere facile prepararlo direttamente.



Mescolando infatti intimamente fenolo e fenilidrazina, ambedue fusi, si osserva un leggero riscaldamento, e dopo raffreddamento il miscuglio si rap- prende in una massa di cristalli bianchi che si possono ricristallizzare dal- l'etere di petrolio (40°-60°).

All'analisi si hanno dei numeri che corrispondono a quelli dell'analisi termica.

Gr. 0,1302 di sostanza, diedero cmc. 15 di N misurato a 5° e 752 mm.

$C_6H_5OH \cdot C_6H_5NH \cdot NH_2$  Calc. N 13,86. Trovato 13,94.

Questo composto forma degli aghetti bianchi, fondenti a 42°, solubili in tutti i solventi organici. Insolubili in acqua. In benzolo è fortemente dis- sociato nei componenti.

Benzolo	Sost. gr.	Conc.	$\Delta$	$M$
Gr. 10,8586	—	—	—	—
—	0,1218	1,12	0,416	137
—	0,2046	3,00	0,920	166
—	0,2664	5,46	1,452	191

$C_6H_5OH \cdot C_6H_5NHNH_2 = 202$

Nella stessa maniera siamo riusciti a preparare il composto della fenil- idrazina col m- cresolo: il miscuglio dei due componenti precedentemente fusi, si raprende per raffreddamento in una massa di cristalli bianchi che si ricristallizzano dall'etere di petrolio (40°-60°). All'analisi si ottengono dei numeri che corrispondono a quelli richiesti da una molecola di fenili- drazina ed una di m-cresolo.

Gr. 0,1666 di sostanza, diedero gr. 0,4370 di  $CO_2$  e gr. 0,1144 di  $H_2O$ .

$CH_3 \cdot C_6H_4 \cdot OH \cdot C_6H_5NHNH_2$  Calc. C: 72,22; H: 7,40  
Trovato " 71,53; H: 7,62.

Questo composto fonde a 36°-37°, e forma degli aghetti sottili, lunghi, assai solubili anche a freddo in tutti i solventi organici, escluso l'etere di petrolio (40-60°) dove sono poco solubili a freddo: insolubili in acqua.

Questo composto è anch'esso in benzolo fortemente dissociato.

Benzolo	Sost. gr.	Conc.	$\Delta$	$M$
Gr. 8,4328	—	—	—	—
—	0,1136	1,34	0,523	130
—	0,1442	3,05	1,020	152

$(CH_3) \cdot C_6H_4 \cdot OH \cdot C_6H_5NHNH_2 = 216$ .

Maggiori difficoltà abbiamo trovato nella preparazione del composto della fenilidrazina col p-, ed o- cresolo.

Mescolando quantità equimolecolari di p- cresolo e fenilidrazina si ottiene un liquido denso che anche lasciato a sè non si rapprende: raffreddando fortemente con anidride carbonica solida ed acetone e lasciando il miscuglio nel bagno per un certo tempo, siamo riusciti ad avere una massa cristallina. Una volta ottenuto il germe è facile preparare anche grandi quantità del composto col p- cresolo, che si può cristallizzare come tutti gli altri dall'etere di petrolio.

Gr. 0,1360 di sostanza, diedero cmc. 15 di N misurati a 10°,5 e 748 mm.  
 $(\text{CH}_3) \text{C}_6\text{H}_4\text{OH} \cdot \text{C}_6\text{H}_5\text{NHNH}_2$  Calc. N 12,96. Trovato 12,96.

Questo composto fonde a 26°: i caratteri di solubilità sono simili a quelli del precedente.

L'o- cresolo si combina anch'esso manifestamente colla fenilidrazina; ma il miscuglio dei due componenti si mantiene soprafuso comunque si operi <sup>(1)</sup>.

I due naftoli si combinano pure colla fenilidrazina: mescolando i due componenti in quantità equimolecolari e scaldando finchè tutto sia fuso, si ottiene, dopo raffreddamento, una massa compatta cristallina del composto d'addizione.

L' $\alpha$ - naftolato è instabilissimo, si altera prontamente e fonde a 26°.

Il  $\beta$ - naftolato è assai più stabile, fonde a 62°-63°, e si cristallizza sciogliendolo in benzolo ed aggiungendo alla soluzione benzolica dell'etere di petrolio sino ad avere un leggero intorbidamento.

Col riposo si separa il composto sotto forma di squamette bianche.

Gr. 0,1278 di sost., diedero gr. 0,3562 di  $\text{CO}_2$  e gr. 0,0746 di  $\text{H}_2\text{O}$ .  
 Gr. 0,1086 di sost., diedero cmc. 10,5 di N misurati a 10° e 742 mm.  
 $\text{C}_{10}\text{H}_7\text{OH} \cdot \text{C}_6\text{H}_5\text{NHNH}_2$  Calc. C: 76,19; H: 6,34; N: 11,11.  
 Trovato C: 76,01; H: 6,48; N: 11,30.

Questo  $\beta$ - naftolato è anch'esso in benzolo fortemente dissociato.

Benzolo	Sost. gr.	Conc.	$\Delta$	M
Gr. 9,7468	—	—	—	—
—	0,1344	1,37	0,450	156
—	0,2036	3,46	0,850	185

$\text{C}_{10}\text{H}_7\text{OH} \cdot \text{C}_6\text{H}_5\text{NHNH}_2 = 252$ .

Abbiamo anche preparato il composto fra pirocatechina e fenilidrazina.

<sup>(1)</sup> Neanche aggiungendo un cristallino del m-, p- cresolato al miscuglio raffreddato dell'o- cresolo e fenilidrazina, si riuscì a far cristallizzare la massa: neanche il p- cresolato fuso e raffreddato cristallizza per aggiunta di un cristallino del m- cresolato.

Se si scioglie a caldo la pirocatechina (1 mol.) nella fenilidrazina (2 mol.), si ha per raffreddamento una massa dura cristallina bianca che si può cristallizzare da poco benzolo.

Gr. 0,1202 di sost., diedero cmc. 17,8 di N misurati a 11° e 753 mm.; ossia per cento parti 17,49 % di N. Per il composto formato da 2 mol. di fenilidrazina e una di pirocatechina si calcola 17.23 % N.

Questo composto si presenta sotto forma di aghi bianchi setacei lunghi che riempiono tutto il liquido da cui si cristallizza. Fonde a 63°.

Hans v. Liebig <sup>(1)</sup>, in alcune osservazioni sul differente contegno dei tre fenoli bivalenti, dice che mentre una soluzione di resorcina e fenilidrazina in benzolo dà immediatamente il composto d'addizione, e l'idrochinone fa altrettanto ma più lentamente, la pirocatechina, in soluzioni non troppo concentrate, non dà alcun precipitato.

Sul composto di fenilidrazina e pirocatechina, non si trova nella letteratura alcun altro cenno.

**Chimica** — *Esperienze sulla fototropia di alcuni fenilidrazoni* <sup>(2)</sup>. Nota di M. PADOA, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

Parecchie sostanze possiedono la proprietà di assumere sotto l'azione della luce colorazioni diverse e di ritornare, conservate al buio, al colore primitivo; il riscaldamento facilita questo fenomeno inverso. Così si comportano il fenilidrazone della benzaldeide <sup>(3)</sup>, quelli dell'anisalaldeide <sup>(4)</sup>, del cuminolo <sup>(5)</sup>, alcuni osazoni <sup>(6)</sup>, la  $\beta$ -tetracloro- $\alpha$ -chetonaftalina e il cloridrato della chinochinolina <sup>(7)</sup>, e finalmente una classe estesa di derivati dell'anidride succinica, chiamati *fulgidi* da Stobbe, che li ha preparati per primo.

Quest'ultimo sperimentatore, in una pubblicazione estesa e riassuntiva sulla fototropia <sup>(8)</sup>, fa notare che la trasformazione dei corpi fototropi non ne altera affatto il carattere chimico; fa poi interessanti osservazioni rilevando che nello spettro vi è per ogni corpo fototropo una zona che produce la colorazione e un'altra che la fa retrocedere.

<sup>(1)</sup> Journal f. pract., 72, 1905, 108.

<sup>(2)</sup> Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

<sup>(3)</sup> E. Fischer, L. Ann., 190, 135.

<sup>(4)</sup> Stobbe, L. Ann., 359, 45.

<sup>(5)</sup> Rudolph, L. Ann., 248, 101.

<sup>(6)</sup> Biltz, Zeitschr. f. Phys. Chem., 30, 527.

<sup>(7)</sup> Marckwald, Zeitschr. f. Phys. Chem., 30, 140.

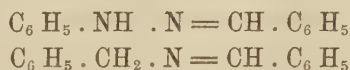
<sup>(8)</sup> Stobbe, L. Ann., 359, 1.



I cristalli dei corpi fototropi esposti alla luce non cambiano forma e rimangono omogenei; chiamando con A e B rispettivamente le forme stabili al buio ed alla luce, un cristallo che ha subito l'illuminazione sarebbe costituito da una soluzione solida di B in A.

Nella Memoria citata pag. 11, Stobbe ammette anche come possibile la formazione di una specie di composto racemico fra le due forme A e B; i risultati delle mie esperienze sembrerebbero atti a far ritenere come più probabile (come anche Stobbe ritiene) la formazione di soluzioni solide.

In seguito a questi fatti mi sembrò non privo d'interesse l'osservare come si comportassero delle miscele cristalline costituite da un corpo fototropo e da uno non fototropo, ma capace di dare col primo delle soluzioni solide: fui mosso a ciò dall'idea che la fototropia potesse avere qualche punto di contatto col polimorfismo, e quindi fosse legata con tutti quei fatti che intervengono a variare la forma cristallina e la stabilità di essa. Non è molto estesa la scelta, volendo realizzare siffatte soluzioni solide; i casi più accessibili si presentano coi fenilidrazoni. Infatti il fenilidrazone di un'aldeide deve essere isomorfo col composto di addizione della stessa aldeide con la benzilammina. Così:



poichè i due composti non differiscono che per avere un gruppo  $\text{CH}_2$  in luogo di  $\text{NH}$ , ed è noto che con simili rapporti si è quasi sempre verificata la formazione di soluzioni solide (<sup>1</sup>).

In tutti quei casi che ho potuto esaminare finora, le soluzioni solide hanno alla luce un comportamento diverso dalle sostanze fototrope pure.

*Fenilidrazone della benzaldeide.* Venne preparato dalla fenilidrazina e benzaldeide e cristallizzato più volte dall'alcool, e fondeva a 155°. La benzilidenbenzilammina, da benzaldeide e benzilammina, venne distillata nel vuoto e passava a 205° a 20 mm. Ho eseguito alcune esperienze crioscopiche per dimostrare la formazione di soluzioni solide fra queste due sostanze. Non essendo ancora nota la costante crioscopica del fenilidrazone della benzaldeide, l'ho determinata sciogliendovi difenile, trifenilmetano, naftalina. Impiegando come solvente il fenilidrazone senza alcuna precauzione non sono possibili misure, perchè questa sostanza si altera a caldo al contatto dell'aria: se però si opera in corrente di acido carbonico le misure possono farsi agevolmente. Ottenni i risultati seguenti:

Sostanza sciolta: difenile  $\text{C}_{12}\text{H}_{10} = 154$ :

Concentrazioni	Abbassamenti	K
1,240	0°,89	110,5
2,246	1°,65	113,1

(<sup>1</sup>) Bruni, Feste Lösungen u. Isomorphismus (1908), pag. 60.

Sostanza sciolta: trifenilmetano  $C_{19}H_{16} = 244$ :

Concentrazioni	Abbassamenti	K
2,385	1°,15	117,6

Sostanza sciolta: naftalina  $C_{10}H_8 = 128$ :

Concentrazioni	Abbassamenti	K
1,260	1°,07	108,7
2,541	2°,15	108,3.

Risulta come media generale  $K = 112,9$ , In base a questo valore vennero calcolati i pesi molecolari della benzilidenbenzilammina sciolta nel fenilidrazone:

Benzilidenbenzilammina:  $C_6H_5 \cdot CH_2 - N = CH \cdot C_6H_5 = 195$

Concentrazioni	Abbassamenti	Peso molecolare ( $K = 113$ )
2,395	1°,24	218,2
4,672	2°,46	214,2

Si ha dunque una discreta anomalia, benchè la benzilidenbenzilammina sia un liquido.

Ciò posto vediamo quale sia il comportamento delle soluzioni solide, in confronto del fenilidrazone puro, alla luce. Tutte le osservazioni seguenti vennero fatte su sostanze chiuse in tubi di vetro in cui si introdusse dapprima acido carbonico e poi si praticò una rarefazione fino a 10 mm., e ciò per evitare, come si evitano in realtà, le trasformazioni di dette sostanze dovute all'azione combinata della luce e dell'aria.

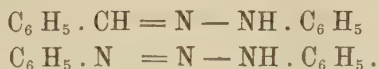
Il fenilidrazone puro, come è noto, si colora rapidamente al sole, e impiega lungo tempo per retrocedere al buio. Il riscaldamento favorisce la retrocessione, ma non si riesce a determinare un vero punto di trasformazione; d'altra parte è noto (Stobbe) che la temperatura alla quale lo scoloramento avviene, cresce con la illuminazione.

Una miscela di benzilidenbenzilammina e fenilidrazone contenente il 4,6 % della prima, preparata per fusione, arrossava al sole, ma al buio retrocedeva rapidamente, e in un'ora ritornava bianca.

Una miscela contenente soltanto l'1 % di benzilidenbenzilammina arrossa rapidamente al sole, ma al buio retrocede quasi completamente in 24 ore, e cioè sempre assai più presto che il fenilidrazone puro.

Ho anche voluto esaminare il comportamento delle soluzioni solide colorate alla luce, quando vengono riscaldate. Mentre il fenilidrazone puro riscaldato lentamente a luce diffusa, si può considerare completamente scolorato a 115°-120°, la soluzione solida all'1 % lo era pure completamente a 95°-100°, e quella al 3 % a 80°-85°.

Un'altra sostanza che poteva dare soluzioni solide col fenilidraz one della benzaldeide, era il diazoamidobenzolo; ciò si rileva dal paragone fra le due formole:



Senonchè ciò non si può dimostrare per via crioscopica per causa della facile decomponibilità del diazoamidobenzolo; e inoltre per la stessa ragione non si potevano preparare miscele per fusione. Perciò si ricorse all'artificio di far cristallizzare il fenilidrazone da un solvente che contenesse già disciolta una certa quantità di diazoamidobenzolo, tale però che la soluzione fosse lontana dalla saturazione. All'uopo si prestava bene il ligroino: si sciolsero in circa 30 cc. di ligroino gr. 1 di fenilidrazone e gr. 0,4 di diazoamidobenzolo (<sup>1</sup>). Per raffreddamento si formarono dei cristalli, della forma di quelli del fenilidrazone ma colorati in bruno, ed omogenei, che costituiscono evidentemente una soluzione solida del fenilidrazone e del diazoamidobenzolo. Per sapere quale ne era la composizione, si determinò l'azoto azoico trattandoli con acido solforico, e ne risultò che il diazoamidobenzolo era contenuto nella miscela con una percentuale di 4,92.

Da una soluzione di gr. 2 di fenilidrazone, gr. 0,4 di diazoamidobenzolo, in 60 cc. di ligroino, si separarono dei cristalli di un giallo chiaro che secondo l'analisi contenevano 1,57 % di diazoamidobenzolo.

Per dimostrare che un'altra sostanza qualunque sciolta in ligroino non poteva inquinare come fa il diazoamidobenzolo i cristalli del fenilidrazone, si preparò una soluzione di gr. 1,5 di fenilidrazone, gr. 1,0 di *p*-biclolorobenzolo, in 50 cc. di ligroino. Da questa soluzione, che secondo si verificò era assai più vicina alla saturazione rispetto al *p*-biclolorobenzolo, di quello che non fosse la soluzione più concentrata col diazoamidobenzolo, si separarono cristalli di fenilidrazone che ossidati col metodo di Carius rivelarono la presenza di sole minime tracce di cloro.

I cristalli della prima preparazione (4,92 % di diazoamidobenzolo), diedero una polvere giallo-sporca che si manifestò assolutamente insensibile alla luce.

I cristalli della seconda preparazione (1,57 %) diedero una polvere giallo-chiara e si colorarono assai debolmente alla luce, meno che le soluzioni solide con benzilidenbenzilammina. La retrocessione è completa dopo 24 ore. Se l'esposizione si ripete una seconda volta sulla stessa sostanza, l'azione è più debole e la retrocessione più rapida. Ciò si constata anche

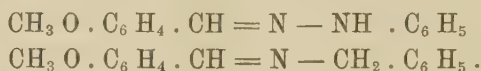
(<sup>1</sup>) Poichè interessava, per altre ragioni, al dott. Ciusa di dimostrare la formazione di soluzioni solide fra quelle due sostanze, così eseguiamo insieme queste esperienze.



meglio confrontando due tubi di cui uno esposto per la prima volta e uno per la seconda. La sostanza *stancata* per l'azione prolungata della luce non riprende le proprietà primitive anche se lasciata parecchi giorni al buio; il punto di fusione è il medesimo prima e dopo l'insolazione (per la miscela all'1,57 %, è 155°).

Preparai ancora una soluzione solida diluitissima di gr. 1 di fenilidrazone, gr. 0,1 di diazoamidobenzolo, cc. 40 di ligroino. Fondeva a 155°-156°. Presentava gli stessi fenomeni dell'altra, ma meno spiccatamente, ed arrossava di più.

*Fenilidrazone dell'anisaldeide.* Venne preparato dall'anisaldeide e fenilidrazina, e cristallizzato ripetutamente dall'alcool. Fondeva a 120°-121°. Come sostanza da scioglierla allo stato solido mi occorreva la anisilidenbenzilammina, come si rileva dal confronto delle due formole seguenti:



Quest'ultima non era stata fin qui preparata, per quanto mi consta. Mescolando quantità equimolecolari di anisaldeide e benzilammina queste reagiscono immediatamente; estraendo con etere e seccando su cloruro di calcio, il residuo cristallizza in una massa scura. Per purificarlo si scioglie in etere di petrolio e si tratta a freddo con carbone animale; l'accesso di solvente viene scacciato facendo bollire nel vuoto la soluzione (il riscaldamento altera la sostanza). In tal modo il composto si ottiene puro, in cristalli bianchi, e fonde a 33°. Vi determinai l'azoto, ottenendo risultato corrispondente al teorico:

	Calcolato	Trovato
Azoto %	6,24	6,25

Tentai di dimostrare la formazione di soluzioni solide col fenilidrazone, ma fu impossibile adoperare in esperienze crioscopiche il fenilidrazone dell'anisaldeide.

Comunque ho eseguito le esperienze seguenti, ammettendo tale formazione per le ragioni già dette ed in seguito al comportamento della benzilidenbenzilammina col fenilidrazone della benzaldeide.

Il fenilidrazone puro alla luce si colora in violetto. Se però si lascia molto tempo esposto, ritorna bianco nè riprende la proprietà di colorarsi alla luce neppure tenendolo parecchi giorni al buio. Ciò nonostante il punto di fusione è inalterato anche dopo tale prolungata insolazione. Questo risultato si ottiene se si ha cura di racchiudere la sostanza in tubi con atmosfera rarefatta di anidride carbonica, come già si disse in precedenza.

Il fenilidrazone così *sovraesposto*, può riacquistare le proprietà primitive, purchè venga fatto ricristallizzare dall'alcool. Questo comportamento del fenilidrazone per azione prolungata della luce non mi consta che sia stato ri-

levato in precedenza, e non potrebbe essere attribuito per ciò che si è detto ad una trasformazione chimica; si potrebbe piuttosto pensare alla formazione di piccole tracce di sostanze atte a catalizzare il processo di scoloramento che di solito avviene nell'oscurità.

Una miscela di fenilidrazone ed anisilidenbenzilammina contenente l'1 % di quest'ultima, si colora alla luce più rapidamente e più intensamente del fenilidrazone puro, e dà luogo ai medesimi fenomeni per insolazione prolungata.

Il comportamento del fenilidrazone puro e della miscela col riscaldamento è analogo a quello osservato nel caso del fenilidrazone della benzoaldeide. Il fenilidrazone dell'anisalaldeide puro, previamente colorato alla luce, si scolora lentamente a 60°; la miscela coll'1 % di anisilidenbenzilammina, come si colora alla luce più rapidamente del fenilidrazone puro, così si scolora più rapidamente se riscaldata da 55° a 60°.

Ho voluto anche vedere se una piccola quantità del fenilidrazone aggiunta a molta benzilidenbenzilammina potesse impartirle le proprietà dei corpi fototropi; ma il risultato fu negativo.

Come esperienza di confronto, ho ancora verificato che sostanze le quali non danno col corpo fototropo soluzioni solide, se fuse con questo, non hanno azione sul comportamento alla luce.

Da quanto si è ora esposto, si rileva che l'aggiunta ad una sostanza fototropa di un corpo capace di sciogliervisi allo stato solido, esercita una azione positiva o negativa, a seconda dei casi, sulla tendenza del corpo fototropo a colorarsi alla luce. I fatti osservati fanno rilevare qualche punto di contatto fra la fototropia ed il polimorfismo.

Per venire a conclusioni più generali è necessario estendere la ricerca ad altre sostanze; così pure sembra interessante vedere se quelle stesse zone dello spettro che hanno azione sulle sostanze fototrope, esercitino pure uguale azione sulle soluzioni solide, oppure se vengano spostate le regioni più attive dello spettro rispetto alle varie miscele considerate.

Stiamo pure occupandoci della ricerca di altri idrazoni fototropi, fra quelli noti e fra quelli non ancora preparati finora, avendo di mira lo studio delle eventuali relazioni fra la struttura chimica e la fototropia in questa classe di sostanze.

Debbo qui ringraziare il dott. Luigi Mervini che mi coadiuvò validamente in una parte di questa ricerca.

Fisica. — *Sulle variazioni delle proprietà fisiche delle leghe metalliche sottoposte alle azioni meccaniche e termiche.* - I. *Il peso specifico.* Nota di E. PANNAIN, presentata dal Socio E. PATERNÒ.

Le proprietà fisiche delle leghe sono strettamente collegate con la struttura, e poichè si è già visto che la struttura delle leghe varia con la laminazione, con la ricottura, con la percussione ecc., queste medesime azioni devono dar origine ad una variazione delle proprietà fisiche della lega.

Ho quindi intrapreso lo studio sistematico delle variazioni delle proprietà fisiche delle leghe sottoposte ad azioni meccaniche e termiche, ed ho ottenuti valori differenti a seconda del trattamento che la lega aveva subito. Il peso specifico, la durezza, la conducibilità termica ed elettrica di una lega di data composizione centesimale, variano al variare dell'azione meccanica o termica alla quale la lega fu sottoposta.

Riporto qui appresso i valori del peso specifico del bronzo (circa 4% Sn) e della lega di argento per monete (Ag 83.5 %, Cu 16.5 %), corrispondenti alle diverse fasi della lavorazione, segnando a fianco di ciascun valore la differenza dal precedente, differenza che rappresenta appunto la variazione dovuta al trattamento meccanico o alla ricottura.

#### I. Bronzo monetario.

Campione	Peso specifico	Variazioni
1. Lega fusa	8,76965	
2. " fusa ricotta	8,77102	+ 0,00137
3. " laminata dopo la ricottura	8,93920	+ 0,16818
4. " ricotta dopo la laminazione	8,94031	+ 0,00111
5. " laminata di nuovo	8,94198	+ 0,00167
6. " ricotta dopo l'ultima lamin. <sup>e</sup>	8,94617	+ 0,00419
7. " coniatà	8,94623	+ 0,00006

#### II. Lega di argento per monete.

1. Lega fusa	9,99932	
2. " fusa ricotta	10,00206	+ 0,00274
3. " laminata dopo la ricottura	10,20244	+ 0,20038
4. " ricotta dopo la laminazione	10,20251	+ 0,00007
5. " laminata di nuovo	10,20759	+ 0,00508
6. " ricotta dopo l'ultima lamin. <sup>e</sup>	10,21648	+ 0,00889
7. " coniatà	10,21636	— 0,00012



I campioni del peso di 100 gr. ciascuno furono prelevati da una medesima verga; ad eccezione dei pezzi conati, gli altri furono limati e levigati a specchio, quindi lavati con benzina e con alcool, poi seccati a 80-90° e lasciati in essiccatore su cloruro di calcio. Le determinazioni furono fatte con la bilancia idrostatica, eseguendo una serie di pesate tutte nelle medesime condizioni. Quando si eseguirono le determinazioni col bronzo la temperatura dell'aria era di 15-16°, quella dell'acqua di 16-17°, e la pressione atmosferica di 758 mm.; quando si eseguirono le determinazioni con la lega d'argento la temperatura dell'aria era di 17-18°, quella dell'acqua di 18-19°, e la pressione atmosferica di 761 mm.

Appunto perchè la temperatura e la pressione rimasero quasi costanti, durante le sperienze, non ho creduto di dare i risultati a 0° e 760 mm. giacchè a me non interessano i valori assoluti del peso specifico, ma le variazioni dovute alle azioni meccaniche, e alla ricottura.

Dai valori sopra riportati apparisce manifesto che la laminazione dà luogo ad un considerevole aumento del peso specifico. Assai più interessante è però l'azione della ricottura che determina un aumento del peso specifico tanto per la lega semplicemente fusa, quanto per quella già lavorata. La ricottura dunque, mentre restituisce la primitiva malleabilità alle leghe già lavorate, non fa perdere la compattezza acquistata con la laminazione.

Maggior importanza avranno i risultati di determinazioni eseguite sopra intere serie di leghe. Il trattamento meccanico e la ricottura, seguite o non da tempera, avendo influenza diversa sui differenti costituenti delle leghe daranno origine a modificazioni delle curve, che rappresentano la variazione delle proprietà fisiche con la composizione, modificazioni che potranno mettere meglio in rilievo la presenza dei diversi costituenti.

**Chimica.** — *Contributo allo studio dell'isomorfismo fra il tellurio e lo zolfo* <sup>(1)</sup>. Nota di GIOVANNI PELLINI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN.

In una comunicazione da me fatta al VI Congresso internazionale di Chimica applicata tenutosi in Roma nel 1906 <sup>(2)</sup>, ho dimostrato che il tellurio ed il selenio devono ritenersi indubbiamente isomorfi fra loro, portando un contributo decisivo alla controversa questione, che fu oggetto di una serie di ricerche da parte specialmente del Retgers e del Muthmann. Ho dimostrato, mediante la curva di solubilità a 21° dei cristalli misti di bromotel-

<sup>(1)</sup> Lavoro eseguito nell'Istituto di chimica generale della R. Università di Padova e comunicato nella Sez. X dell'VIII Congresso di chimica applicata, Londra 1909.

<sup>(2)</sup> Vol. VI, Sez. X, pag. 125: vedi inoltre Gazz. Ch. italiana, 36, II, 455 (1906).

lururo di fenile e bromoseleniuro di fenile, che questi due composti sono fra loro isodimorfi; inoltre che il tellurato acido di rubidio ed il seleniato acido di rubidio si separano dalle soluzioni riunite contenenti percentuali di seleniato superiori all'equimolecolare in forma di cristalli misti del tipo del seleniato. In una comunicazione ulteriore <sup>(1)</sup> ho dimostrato poi che anche il tellurio ed il selenio metallico si depositano dai miscugli dei due elementi fusi omogeneamente, in una serie ininterrotta di cristalli misti appartenenti al sistema esagonale, il che è una prova esauriente dell'isomorfismo dei due elementi.

Ma se le relazioni di isomorfismo fra il selenio e il tellurio possono oggi ritenersi stabilite in modo sicuro, manca invece qualunque esempio di relazione di isomorfismo fra lo zolfo ed il tellurio. Si noti che la forte differenza nei pesi atomici, contribuisce a rendere meno evidenti le analogie fra questi elementi. E così le possibili relazioni di isomorfismo saranno da aspettarsi meno spiccate, in accordo con i caratteri generali delle serie omologhe del sistema periodico.

Il Retgers <sup>(2)</sup> afferma che il tellurio non si mescola isodimorfo collo zolfo; e si basa sopra i seguenti fatti:

1. L'isomorfismo (o isodimorfismo) fra il tellurato e l'osmiato potassici.
2. La riscontrata mancanza di isomorfismo fra il tellurato potassico ed il solfato potassico.
3. La mancanza di miscibilità (nel ioduro di metilene) fra lo zolfo ed il tellurio, mentre lo zolfo ed il selenio si mescolano facilmente.

4. La tendenza alla formazione di numerosi composti chimici fra lo zolfo ed il tellurio, tendenza che non si riscontra fra lo zolfo ed il selenio.

Si aggiunga che il tellurio metallico venne trovato esclusivamente in cristalli del sistema esagonale-romboedrico <sup>(3)</sup>.

Allo scopo di portare un contributo alla questione dell'isomorfismo dei due elementi, io riferisco qui, nelle sue linee principali, l'esteso studio eseguito sul sistema « zolfo-tellurio » dal punto di vista degli equilibri chimici eterogenei. Che un indirizzo in questo senso conduca a buoni risultati, è già stato dimostrato dal Ringer <sup>(4)</sup> per il sistema « zolfo-selenio » e da me per il sistema « selenio-tellurio ».

Già Berzelius e Klaproth fondendo insieme solfo e tellurio non ottennero composti fra questi due elementi. Notarono che, allo stato fuso, i due elementi si mescolano in tutte le proporzioni e che i miscugli ottenuti per fusione con piccola percentuale di tellurio rendono lo zolfo rosso, mentre che i miscugli ricchi in tellurio tendono al nero.

<sup>(1)</sup> Gazz. Ch. italiana, 36, II, 469 (1906).

<sup>(2)</sup> Zeit. phys. Chemie, 12, 590 (1893).

<sup>(3)</sup> Groth. Chemische Kristallographie, I Teil, pagg. 25 e 35.

<sup>(4)</sup> Zeit. anorg. Chemie, 32, 183 (1902).

Per azione dell'idrogeno solforato sulle soluzioni di acido telluroso e acido tellurico si precipitano delle sostanze brune, che corrispondono rispettivamente alla composizione  $\text{TeS}_2$  e  $\text{TeS}_3$ , ma che si decompongono nei due elementi non solo per fusione, ma anche sotto l'azione del solfuro di carbonio a freddo.

Tali ricerche sono, nel loro complesso, confermate da tutti gli altri sperimentatori <sup>(1)</sup>. Per cui si può concludere che se l'esistenza del composto  $\text{TeS}_2$  può, sotto certe condizioni, essere ritenuta per verosimile, per lo meno esso è instabilissimo anche alla temperatura ordinaria. Più problematica risulta l'esistenza del composto  $\text{TeS}_3$ . Per fusione non si ottengono composti; anzi Mac Ivor <sup>(2)</sup> aggiunge sembrargli che l'affinità chimica fra questi elementi cessi ad una temperatura molto al di sotto di quella alla quale ogni miscela di essi può fondere, e che, in conseguenza di ciò, con tale sistema, non si possono formare composti definiti, cioè solfuri.

Degno di nota infine è l'esistenza di una varietà di solfo rosso del Giappone chiamata *seki-rin-seki* ed analizzata da Divers e Shimidzu <sup>(3)</sup>:

S	Te	Se	As	Mo	Sostanze terrose	Somma
99,76	0,17	0,06	0,01	tracce	tracce	100

Si trova insieme allo zolfo giallo in parecchi giacimenti vulcanici del Giappone in massi cristallini semitrasparenti. Anche le varietà gialle contengono tracce di tellurio e di selenio. Tale tellurio è quello che fu assoggettato da Masumi Chikaskigé <sup>(4)</sup> alle determinazioni di peso atomico.

#### *Curve di congelamento delle miscele di tellurio e zolfo.*

Lo studio termico delle miscele di zolfo e tellurio venne eseguito studiando l'andamento delle curve di raffreddamento. La fusione fu compiuta in provette di vetro difficilmente fusibile, tutte di circa uguale capacità e spessore delle pareti, immerse in un bagno di sabbia e protette da un forte irradiazione da un dispositivo opportuno. Un termo-elemento platino-platinorodio [spessore 0,2 mm.  $\times$  lunghezza 150 cm.] protetto da un sottile tubetto di quarzo trasparente, servì alla misura delle temperature con l'impiego di un galvanometro di Siemens e Halske a due scale di temperatura.

Poichè il peso specifico del tellurio è notevolmente diverso da quello dello zolfo, venne impiegato sempre lo stesso volume di miscela di 3 cm.<sup>3</sup>, tenendo poi conto della quantità in peso della miscela per il calcolo delle temperature eutectiche. Di ogni miscela vennero determinate parecchie curve

<sup>(1)</sup> Vedi per la letteratura Gutbier e Flury, Z. anorg. Chemie, 32, 273 (1902).

<sup>(2)</sup> Chemical News, 87, 209 (1903).

<sup>(3)</sup> Chemical News, 48, 204 (1883); Inoltre Jahres Bericht 1883, 1828.

<sup>(4)</sup> Journal of the chemical Society, 69, 881 (1896).



di raffreddamento, proseguite molto al di sotto della temperatura eutectica. I valori medi delle determinazioni sono raccolti nella seguente tabella:

Percentuali atomiche tellurio	Principio della solidificazione	Temperature eutectiche	Tempi di cristallizzazione eutectica in secondi
100 (tellurio puro)	451°	—	—
98	441.5	(99.5)	—
95	435	—	—
90	431.5	103 (97.5)	90
80	420	105.5 (100.5)	163
70	409	(99.5)	187
60	397.5	108	219
50	387.5	109	257
40	368	110.5	298
30	347.5	110	343
25	349	107 (102)	383
20	321.5	106.5	414
10	298	108 (98)	536
5	212	107 (100)	701
2	163	107.5	797
1	—	110	868
0 (zolfo puro)	trimetrico monoclinico	—	—
	113.5 119		

#### Osservazioni generali sulle curve di fusione:

1. Il principio della solidificazione è regolare in molti casi, in altri si ha una piccola soprafusione, in pochi questa soprafusione è assai marcata.
2. Per le miscele al 50, 25, 20, 10% atomi di tellurio si notano nei principî della solidificazione dei valori assai concordanti con l'andamento generale della solidificazione, ma anche dei valori spiccatamente anomali: essi sono presentati dalla stessa miscela alla prima fusione od in fusioni successive, quando le precedenti offrono valori normali, oppure in miscele a uguale concentrazione, ma di diversa preparazione. Si notano dei valori generalmente assai elevati fra i quali non è però possibile fare media; qualche rara volta valori notevolmente inferiori. Tuttavia tutte le curve di raffreddamento hanno forma normale fino alla temperatura eutectica, cioè tutte presentano un rallentamento ed un arresto eutectico. L'agitazione, la semina di germi ed il riscaldamento rapido o lento non sembrano aver gran peso sulle anomalie: soltanto se la massa non è notevolmente riscaldata sopra la temperatura di fusione completa, si hanno valori più regolari. Tali anomalie devono perciò verosimilmente trovare la loro spiegazione nelle anomalie proprie al polimorfismo dello zolfo e del tellurio e che disturbano anche la fusione delle miscele di selenio e zolfo, come ha già osservato il Ringer, il quale è ricorso per ciò a misure dilatometriche, che nel mio caso però non sono possibili, data la temperatura assai elevata alla quale si dovrebbe operare. Tut-

tavia, poichè in via generale non si può escludere la formazione anche di composti, così intendo sottoporre questa parte del diagramma di congelamento ad un più accurato esame.

3. Per le miscele al 98 e 95% di tellurio non è possibile osservare un arresto termometrico alla temperatura eutectica data la grande massa del tellurio in confronto a quella del zolfo. È però da notarsi che se la massa

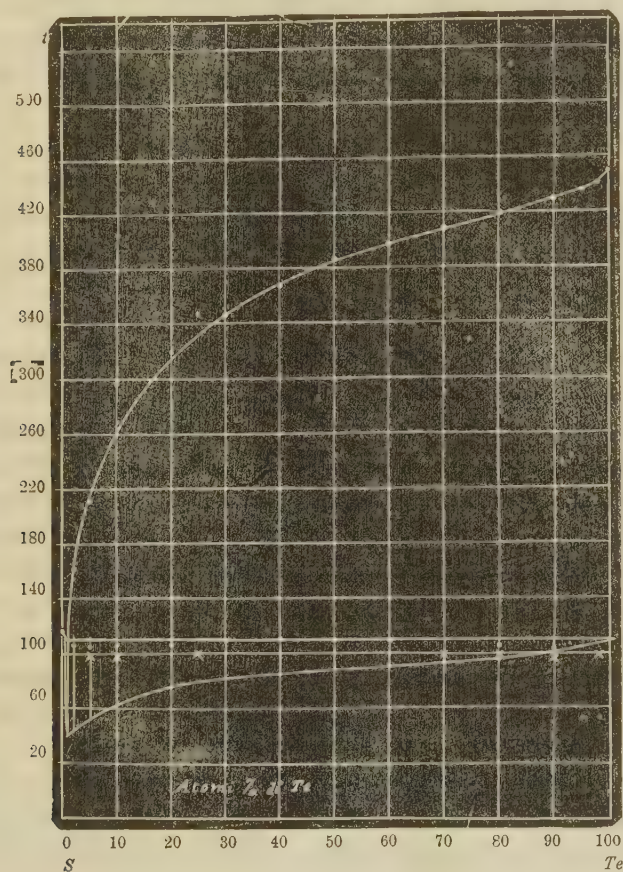


FIG. 1.

raffreddata viene di nuovo e opportunamente riscaldata a 120-130°, si osservano in mezzo al tellurio compatto delle piccole goccioline di zolfo fuso. Solo in un caso e per la miscela al 98% si ebbe a 99.5° una piccolissima soprafusione ed un piccolissimo arresto. Tutte le altre miscele fino alla concentrazione 1% forniscono arresti eutectici la maggior parte con soprafusione, da cui ha origine la forma della curva rappresentante i tempi eutectici (<sup>1</sup>).

4. Nella tabella e nel diagramma relativo (fig. 1) sono riportate due temperature eutectiche; ciò è stato fatto in vista della probabile solidificazione

(<sup>1</sup>) Ruer. Metallographie, pag. 290 (1907).

delle varie miscele nella forma monoclina dello zolfo, che dà luogo a punti eutectici più elevati (caso normale) o della solidificazione della miscela nella forma trimetrica dello zolfo, per cui sono da osservarsi eutectici più bassi. Il diagramma dei tempi eutectici si riferisce ai valori più elevati.

5. Le miscele a composizione inferiore all'uno per cento atomico di tellurio non danno luogo a indicazioni termometriche nette. Perciò vennero eseguite per questa parte del diagramma delle esperienze a parte.

6. Dall'andamento delle curve di solidificazione delle miscele di tellurio e zolfo si conclude che questi due elementi non formano nessun composto fra loro.

**Zoologia.** — *Nuove osservazioni sulla Phylloxera quercus Boyer de Fonsc.* <sup>(1)</sup>. Nota preliminare <sup>(2)</sup> di BIANCA BONFIGLI, presentata dal Socio B. GRASSI.

Nel dicembre passato, controllando i caratteri morfologici riferiti dal Börner per tener separata la *Phylloxera quercus* di Boyer de Fonscolombe dalla *Ph. florentina* di Targioni Tozzetti, ero giunta alla conclusione che tali caratteri non sembravano giustificare la separazione <sup>(3)</sup>. Rimaneva da prendere in esame il criterio biologico, già ammesso per la separazione delle due specie dal Targioni Tozzetti e dal Lichtenstein, cancellato in seguito dal Del Guercio e da ultimo riesumato dal Börner. Il Börner, oltre a determinare di nuovo che in natura la *Ph. quercus* vive sulla *Quercus coccifera* e sulle querce del gruppo *robur*, la *Ph. florentina* sulla *Q. ilex* e sulle querce del gruppo *robur*, riferiva anche di non esser riuscito a far passare su *Q. ilex* gli individui pei quali egli limita la denominazione di *Ph. quercus*.

L'asserzione del non attecchimento sul nuovo ospite, in apparenza di gran valore, poteva esser messa in dubbio ove si fosse tenuto presente che praticamente riesce di solito molto difficile trasportare fillossere vive da una pianta ad un'altra, sia pure della stessa specie, in modo tale che possano poi attecchire bene; si poteva, cioè, pensare che l'esperimento fosse riuscito negativo, non perchè impossibile di per sè stesso, ma perchè fatto in condizioni sfavorevoli. Così al principio della primavera ho voluto vedere come si comportasse da noi su *Q. ilex* e su *Q. coccifera* la fillossera dal Börner distinta come *florentina*, da me identificata alla *Ph. quercus*.

<sup>(1)</sup> Dal Laboratorio di Anatomia Comparata della R. Università di Roma.

<sup>(2)</sup> Sedicesima delle Note sui Fillosserini. Si veda la Nota del prof. Grassi pubblicata in questo stesso numero dei Rendiconti.

<sup>(3)</sup> Si veda la Nota (11<sup>a</sup> della serie) pubblicata da Grassi e Foà: *Sulla classificazione delle fillossere*. Rend. Acc. Lincei, vol. XVII, serie 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> sem., fasc. 12<sup>o</sup>.



Potei raccogliere nel marzo, sopra un esemplare di *Q. coccifera* (Kermes) all'Orto Botanico, alcune uova d'inverno che mi si mostrarono identiche a quelle raccolte su *Q. ilex*. In seguito, nell'aprile, sullo stesso esemplare e su due altri ancora, raccolsi molte neonate dall'uovo d'inverno, che confrontate con neonate raccolte su leccio, mi si dimostrarono ancora identiche ad esse <sup>(1)</sup>. Le fillosere dell'uno e dell'altro ospite, si mantennero identiche anche in seguito; a termine di sviluppo si ebbero da ambedue le parti fondatrici grosse, giallo verdastre, con poche macchie aranciate sul dorso, evidentemente trasparenti dall'interno, con tubercoli uguali di forma e di lunghezza; da ambedue le parti le fondatrici deposero uova sparse lungo i germogli, lungo le nervature mediane e i piccioli delle foglie: da tali uova nacquero neonate identiche tra di loro, giallo pallide, che in parte diventarono alate, in parte rimasero attere. Le alate di kermes, identiche a quelle di leccio <sup>(2)</sup>, emigrarono, le attere rimasero sulla pianta su cui erano nate, a dare una nuova generazione <sup>(3)</sup>.

Vediamo ora l'esito degli esperimenti di trasporto degli individui da una pianta all'altra. Avendo notato in principio di stagione che le fillosere schiuse dall'uovo d'inverno si mantengono per alcuni giorni immobili sulle foglie vecchie, sui piccioli, sui rami, prima di passare sulle foglioline giovani, ho creduto opportuno usufruire di questa condizione per il trasporto delle fillosere di leccio sulle *cocciferae*.

Raccolte alcune foglie di leccio cariche di fillosere ancora immobili, le ho messe sopra una piantina di *Q. coccifera* tenuta in vaso, fornita di teneri germogli: dopo un po' di tempo le piccole neonate si stabilirono sul nuovo ospite, su cui crebbero poi benissimo, comportandosi, esse stesse e la loro prole, come se si fossero trovate sui lecci. Ho tentato anche il passaggio

(1) Noto qui che in generale le neonate dall'uovo d'inverno raccolte sia su *ilex*, sia su *coccifera*, assomigliano molto, per la forma del corpo, se non per il colore, alle corrispondenti neonate di altre specie, raccolte sulle varie querce. Gli unici criteri morfologici sicuri per distinguere le neonate dei lecci e dei kermes dalle altre sono la forma e il colore delle minuscole papille che sorreggono il pelo terminale: a cono schiacciato, ben arrotondate alla base, molto brune, coi contorni che spiccano sulla superficie del dorso.

(2) Le differenze tra le ali dei Chermesini e quelle dei Fillosserini diminuiscono notevolmente se si tiene conto delle trachee. Infatti io ho osservato che nelle ali anteriori di *Ph. quercus* le trachee prendono una disposizione che corrisponde assai bene a quella delle nervature di *Pineus pini* riportata dal Börner a pag. 110 della sua Monografia sui Chermidi e corrisponde anche alla figura delle nervature date dal Balbiani nella Tav. II del suo studio sulla fillossera delle querce (1884).

(3) Cosa strana, quest'anno a Roma le querce del gruppo *robur* non si sono quasi affatto infettate colle alate di *Ph. quercus*: si trovano le figlie di queste alate in numero scarsissimo sia all'Orto Botanico, sia alla Villa Borghese, sia nei giardini di Via Panisperna; anche sulla terrazza del nostro Laboratorio se ne hanno pochissime, malgrado la protezione delle gabbie di garza.

inverso, da *Q. coccifera* a *Q. ilex*, in capsule di Petri, e l'esperimento è riuscito perfettamente.

Riassumendo quanto ho detto e tenendo conto di altri particolari che riferirò nel lavoro in esteso, si ha che a Roma: 1° fondatrici morfologicamente identiche si possono raccogliere in primavera su *Q. coccifera*, su *Q. ilex*, su *Q. incana*, su *Q. fillireoides* e su *Q. suber*. (Per la *Q. robur* v. avanti). — 2° Le filloscere raccolte su *Q. coccifera* vivono benissimo se si trasportano su *Q. ilex* e viceversa; con tutta probabilità vivono anche quelle trasportate dalle altre querce nominate. — 3° Tutte le filloscere indicate si comportano, riguardo al ciclo di vita, allo stesso modo. Non è quindi possibile fare la scissione di due specie.

Passo ad esporre il risultato di una ricerca da me compiuta riguardo al modo di comportarsi delle generazioni nella stagione invernale.

In seguito a quanto avevo osservato nell'autunno passato sull'azione della temperatura e delle piogge insistenti (vedi la mia Nota precedente: 12<sup>a</sup> della serie) sorgeva spontaneo il pensiero che ad un certo punto le generazioni si estingueressero, oppresse dal freddo e dall'acqua. Le prime a scomparire furono le alate. Un po' per volta incominciarono a diradare anche le forme in accrescimento e le attere adulte, e rimasero solo assai abbondanti le neonate. Quest'ultime assunsero un colore rosso aranciato, si immobilizzarono sotto le foglie più dure e sembrarono essere delle vere ibernanti. A mezzo gennaio sui vasi del nostro terrazzo erano scomparse le larve in accrescimento e, oltre le presunte ibernanti, rimaneva una madre attera con poche uova che essa aveva deposto ed una covata di numerosissime uova sotto una foglia un po' accartocciata e ben riparata. Queste ultime uova per molto tempo rimasero chiare, poi pian piano diventarono gialle; il 16 febbraio uno, esaminato al microscopio, presentò un embrione bene sviluppato, già fornito tanto di unghie, quanto di peli. Molte di tali uova arrivarono vive — sembra impossibile — al marzo, poi finirono col morir tutte (verso il 10 marzo). In questo momento rimanevano — o almeno si potevano osservare — ancora due ibernanti, che da un po' di tempo andavano assumendo una colorazione più chiara di quella che avevano in pieno inverno, pur non avendo subito ancora alcuna muta. Il 21 marzo una delle due inaugurò la primavera col suo risveglio; l'altra aspettò a muoversi tre giorni dopo. Per alcuni giorni rimasero sulla foglia su cui ciascuna aveva svernato; la stagione era assai incostante ed esse si muovevano un po', poi tornavano torpide; il 1° d'aprile una delle due passò sopra un germoglio. (L'8 aprile ho trovato numerose neonate dall'uovo d'inverno, sui lecci).

Ho esposto un po' minutamente la storia delle generazioni partenogenetiche sopravvissute, per poter trarre una conclusione, che sembri a tutti assai verosimile. Ove si pensi, da una parte, che quest'anno, malgrado la stagione sia stata assai rigida e nel mese di marzo si siano avute bufere



di vento e di grandine e rincrudimenti di temperatura, l'intervallo tra le ultime uova partenogenetiche e le prime neonate dall'uovo durevole, è stato, sulla nostra terrazza, solo di un mese circa; dall'altra parte che in annate miti l'uovo durevole si può schiudere anche a mezzo marzo, non mi pare inverosimile ammettere che spesso, a Roma ed in paesi più caldi, in luoghi un po' riparati, non vi debba essere intervallo tra le generazioni di un anno e quelle dell'anno successivo.

Era molto interessante seguire lo sviluppo e la prole delle vere ibernanti (neonate) in primavera, poichè esse non erano state vedute mai prima, che io sappia, da nessuno <sup>(1)</sup>.

Di una sola delle mie due io posso parlare con sicurezza. Essa crebbe rapidamente, produsse una piegatura pronunciatissima nella foglia che pungeva <sup>(2)</sup> e depose un numero non troppo considerevole di uova. Da queste uova sono derivate quasi tutte madri alate, assai piccole, ed alcune madri attere: le piccole alate dovevano essere sessupare: il 26 maggio avevo infatti alcune uova di sessuali, quasi sul punto di nascere, che io giudico provenienti da esse.

Durante l'inverno avevo cercato invano alla Villa Borghese e all'Orto Botanico ibernanti sui lecci, certamente meno riparati dalle intemperie dei nostri sulla terrazza; negli ultimi giorni di maggio e nei primi di giugno ho cercato moltissimo se vi fossero sugli stessi lecci dei sessuali, ma non sono riuscita affatto a trovarne. Il fatto di esservi precocemente i sessuali solo là dove erano d'inverno le ibernanti, è venuto indirettamente ad eliminare il dubbio sorto recentemente, che anche alcune delle prime alate sviluppatesi sui lecci potessero dare dei figli senza rostro; del resto per maggior sicurezza ho raccolte in capsule di Petri molte delle prime alate, e da esse ho ottenuto solamente figli con rostro.

Intorno alle generazioni derivate dall'uovo d'inverno, aggiungo qualche osservazione alle altre dell'anno passato.

L'infezione sui lecci già al principio di stagione era molto abbondante, giustificata facilmente dal numero considerevolissimo di uova durature che si erano andate accumulando l'anno passato. Nelle piante del nostro laboratorio — che del resto si trovano in condizioni molto fortunate — ogni foglia vecchia ospitava perfino quindici o venti neonate; anche all'aperto però se ne trovavano moltissime; rimane anche per questa ragione esclusa la schiusura delle uova fecondate nell'estate, che ancora propende ad ammettere il

<sup>(1)</sup> Donnadieu (1887) aveva parlato di numerosissime colonie invernali di *Ph. quercus* sui rami e sul tronco delle querce, ma Balbiani aveva ribattuto che si trattava di afidi.

<sup>(2)</sup> Dice il Del Guercio che solo la fondatrice di leccio (derivata dall'uovo invernale) piega le foglie; io ho osservato che, se trovano foglie giovani, tutte le attere che vengono in seguito possono produrre la stessa piegatura.



Del Guercio, per spiegare una certa scarsezza di neonate dall'uovo d'inverno, che egli ritiene verificarsi in primavera.

Come ho già detto le neonate dall'uovo d'inverno prima di stabilirsi sui germogli nuovi rimangono un po' di tempo immobili sulle parti vecchie della pianta, in vicinanza del luogo in cui nacquero. Se la pianta presenta già delle gemme in via di svolgimento, il passaggio ai germogli avviene dopo due o tre giorni di immobilità; se invece dopo questo termine di tempo non vi sono ancora condizioni di nutrimento adatte, si può avere un ritardo nell'emigrazione ancora di vari giorni. All'Orto Botanico, per esempio, ho potuto osservare le neonate immobili sulle foglie vecchie per più di una settimana, senza che la pianta germogliasse ancora. Le neonate però non possono rimanere al di là di un certo limite di tempo sulle parti vecchie, perchè da queste sembra non riescano a ricavare il nutrimento opportuno. Non sono mai riuscita a vedere all'aperto forme derivate dall'uovo d'inverno che su parti non giovanissime della pianta avessero subito la prima muta e nemmeno in prigionia ho potuto far mutare le neonate sulle foglie dell'anno andato.

Anche per la seconda generazione si ha una condizione di cose pressochè identica. L'accrescimento delle fillosere avviene sulle parti giovani della pianta, nel maggior numero dei casi alla pagina inferiore delle foglie dell'annata. Le generazioni che vengono in seguito, invece sembrano adattarsi meglio alle condizioni poco favorevoli di nutrimento e si possono riscontrare facilmente in tutti gli stadi di sviluppo fissate sotto le foglie dure, sui ramoscelli e perfino, se la pianta è assai giovane, sul tronco dei lecci, in corrispondenza delle piccole screpolature della corteccia: dopo le varie mute, divenute adulte, tanto le alate (sessupare) quanto le madri attere (virginopare) possono deporre le uova nelle screpolature della corteccia.

Mi rimane ora da esporre ciò che è successo delle uova invernali deposte sulle querce (del gruppo *robur*) da *Ph. quercus* sviluppatesi sopra di esse.

Al principio della primavera, quando sui lecci incominciava a trovarsi la prima generazione, sulla terrazza del Laboratorio anche sulle querce, quà e là si vedevano delle neonate. Poteva venire il dubbio che si trattasse di un casuale passaggio di neonate dai lecci, ma io potei assicurarmi che non era così, sia col porre a notevole distanza dai lecci alcune piantine di quercia, sia coll'isolarne una rigorosamente (coll'acqua), tutte senza fillosere. Dopo alcuni giorni sopra varie delle piante poste da parte comparvero uno o due neonate; cinque ne vidi apparire nello spazio di due o tre giorni sulla pianta isolata coll'acqua.

D'altro canto per sicurezza ho tentato di far vivere le neonate di leccio sulle querce, sia in terrazza, sia nelle capsule di Petri. Malgrado il tentativo fosse fatto ripetutamente ed in buonissime condizioni, non sono riuscita mai a far stabilire le giovani fondatrici di leccio sulle querce.

Le fillossere che erano nate sulle querce, in gran parte abbandonarono le piante e così sfuggirono alla mia osservazione; alcune però poterono essere seguite nel loro accrescimento. Ho motivi per ritenere che più di una sia riuscita ad ovificare sulle stesse querce.

Riguardo all'emigrazione delle fillossere di leccio sulle querce debbo notare che, profittando del fatto che le fondatrici adulte talvolta vanno a deporre le uova assai lontano dal luogo in cui sono cresciute, si può ottenere di farne passare alcune sulle querce ed ivi far deporre le uova. I piccoli che nascono possono adattarsi a queste piante, crescere, divenire alati e deporre a lor volta le uova. Io al presente ho un vaso di quercia con molti figli di tali alate, alcuni dei quali già sono adulti e ovificano.

Da questo caso estremo del passaggio delle fondatrici, si arriva per gradi all'altro dell'emigrazione della seconda generazione dopo l'acquisto delle ali. Infatti, se le piante sono a contatto, già le neonate di seconda generazione, benchè raramente, passano sulle querce; passano anche alcune larve che hanno già fatto mute e moltissime ninfe.

Per precisione storica riassumo alcuni punti svolti in questa e nelle mie precedenti Note.

1. Le fillossere italiane determinate come *Ph. quercus* e come *Ph. florentina* sono identiche: l'identità era già stata ammessa dal Del Guercio (1900) e negata dal Börner (1908).

2. Le alate che si sviluppano sui lecci vanno distinte in virginopare (Lichtenstein, Targioni, Del Guercio, Grassi e Foà) e sessupare (Fuschini). I primi tre autori ammettevano unicamente le virginopare, l'ultimo unicamente le sessupare. Grassi e Foà, che già avevano veduto le virginopare (1° 7mbre 1907), per spiegare i risultati discordi dei vari autori, supposero che — se non vi era errore di specie — si dovessero ritenere virginopare le alate sviluppatesi da principio sui lecci, sessupare le altre (8 8bre 1907).

Sotto la direzione del prof. Grassi, io ho dimostrato a Roma (6 settembre 1908) che quest'ultima supposizione era conforme ai fatti; ciò ha veduto contemporaneamente anche la Foà a Fauglia. Io ho inoltre determinato che soltanto le alate virginopare passano sulle querce; le alate sessupare, sviluppatesi sui lecci, non emigrano su di esse: ho tolto così di mezzo la schiusura estiva, necessariamente ammessa dal Fuschini, delle uova fecondate, sulla quercia, ed ho provato che l'infezione può mantenersi sui lecci indipendentemente dalle querce. Questi fatti in parte concordano con quelli osservati più tardi dal Del Guercio (*Estratti dal "Redia"* 1° febbraio 1909) e da Franceschini e Fuschini (*Bull. Minist. Agricolt.*, aprile 1909). Con tutta probabilità corrispondono ai figli delle alate sessupare quei *maschi senza rostro*, sui lecci, di cui parla il Macchiati nel 1881 e che egli interpreta come figli delle fondatrici, destinati a fecondare le alate migratrici.



Nella presente Nota tra l'altro io ho dimostrato che l'infezione può mantenersi sui lecci anno per anno anche per mezzo delle ibernanti.

D'altra parte io ho dimostrato che le alate — tutte sessupare — sviluppatasi sulle querce, possono quivi depositare le uova di sessuali, dando così origine all'uovo d'inverno sulla quercia. Ciò permette il mantenersi dell'infezione da un'anno all'altro anche sulle querce, indipendentemente dai lecci (Nota del 6 settembre 1908 e Nota presente) <sup>(1)</sup>.

## MEMORIE DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

P. VINASSA DE REGNY. — *Fossili ordoviciani del Nucleo centrale carnico*. Presentata dal Socio A. TARAMELLI.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente BLASERNA presenta i volumi 1° e 2° dell'opera del Socio nazionale S. A. R. IL DUCA DEGLI ABBRUZZI: *Il Ruwenzori* (parte scientifica), dando notizia di quanto nei predetti volumi è contenuto, e aggiungendo che della importante pubblicazione sarà inviato un ringraziamento all'Augusto Donatore.

Il Segretario GRASSI richiama l'attenzione della Classe sulle pubblicazioni dei Soci G. SCHIAPARELLI, SILVESTRI, GYLDÉN, LACROIX, LIAPOUNOFF, PICKERING, e sul 3° volume delle *Opere matematiche di L. FUCHS*.

<sup>(1)</sup> Mentre la Nota è in via di stampa, verifico che anche una parte delle alate nepoti delle fondatrici (sviluppatasi sui lecci), passa sulle querce, ove dà uova di rostrati; le altre, che sono già sessupare, restano sul leccio su cui sono nate, o passano su altri lecci. Tra queste nepoti ne ho veduta una sessualmente matura, giallo verdastra, appena con traccia di ali, con antenne molto lunghe e occhi simili a quelli di ninfa.

---